Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corsi di Studio in Matematica ed in Matematica per le Applicazioni

A.A. 2001-02

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2 del giorno 16-04-2002

1) Dimostrare che se $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ è una funzione integrabile secondo Riemann, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Quindi provare che, se f è continua, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

2) Sia $f : [a,+\infty[\to [0,+\infty[$ integrabile in senso improprio e tale che esista $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Calcolare tale limite.

3) Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{(\cos^3 x - \cos x \sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sin x\sqrt{(\sin x - 4)(\cos^2 x - 2)}}$$

dopo averne precisato il dominio.

4) Studiare l'integrabilità in $[2,+\infty[$ della funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Quindi dire se la funzione

$$g(x) = \int_2^x f(t)\,dt \; : [2,+\infty[\to \mathbb{R}$$

ammette asintoti orizzontali oppure obliqui.

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corsi di Studio in Matematica e in Matematica per le Applicazioni

A.A. 2001-02

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2 del giorno 07-05-2002

1) Assegnata la successione di funzioni

$$f_n(x) = n\,\sin(n^2x)\,e^{-n^2x}\,:\,[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$$

a) determinarne l'insieme E di convergenza puntuale;

b) dire se la convergenza è uniforme in E ed, in caso negativo, determinare eventuali sottoinsiemi di E dove la convergenza è uniforme.

2) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\ln(nx)}{n+1}(2x)^n \qquad\qquad x>0,$$

a) determinarne l'insieme E di convergenza semplice

b) dire se la convergenza è uniforme in E ed, in caso negativo, determinare eventuali sottoinsiemi di E dove la convergenza è uniforme

c) dire se la convergenza è totale in E ed, in caso negativo, determinare eventuali sottoinsiemi di E dove la convergenza è totale.

3) Assegnata la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x e^{-t^2}t^n(1-t)\,dt \qquad\qquad t\in\,]-1,1[\,,$$

dire se essa converge ed eventualmente calcolare la sua funzione somma.

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Laurea in Matematica e Matematica per le Applicazioni - A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 13-06-2002

1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}(1 + \sqrt{6x - x^2 - 8})}$$

2) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n e^{-nx^2} - x\text{arctg}(e^{nx} + x)}{2^n \log(3n+1)}$$

calcolare

$$\lim_n \int_{-2}^{2} f_n(x)\, dx$$

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \log(1+\sqrt{x^2+y^2}) - y^2 - xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire se
1) f è continua in $(0,0)$
2) f è parzialmente derivabile in $(0,0)$
3) f è differenziabile in $(0,0)$.

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Laurea in Matematica e Matematica per le Applicazioni - A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 09-07-2002

Non essendosi presentato nessun candidato alla prova del 13-06-2002, in data odierna è stato riproposto il compito d'esame del 13-06-2002

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Laurea in Matematica e Matematica per le Applicazioni - A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 03-09-2002

1) Determinare le primitive della funzione

$$f(t) = \frac{\sqrt{e^t} - e^{2t}}{1 + e^t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Posto, poi,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

determinare il campo di esistenza e gli eventuali asintoti orizzontali ed obliqui delle funzione F.

2) Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Assegnata la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2y^2)}{xy^\alpha} & y > 0, x \neq 0 \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

dire per quali valori del parametro α
1) f_α è continua nell'origine
2) f_α è differenziabile nell'origine.

3) Assegnata la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2x - nx^2)^2 + 1}$$

1) stabilire l'insieme E di convergenza puntuale
2) dire se la convergenza è uniforme in E
3) dire se la convergenza è totale in $E \cap]-\infty, a]\,, a < 0$, ed in $E \cap [b, +\infty[\,, b > 0$.

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Laurea in Matematica e Matematica per le Applicazioni - A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 19-09-2002

1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x}}$$

2) Dire quale delle seguenti funzioni

$$f_1(x,y) = \frac{1}{1+\sqrt{x^4+y^2}}\ ,\ f_2(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{xy} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

è
a) continua nell'origine
b) derivabile parzialmente nell'origine
c) differenziabile nell'origine
giustificando le risposte.

3) Determinare gli estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y) = \log[(4x^2-y^2)(1-x)+1]$$

nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y \geq 0, 2x-y \geq 0, x-1 \leq 0\}$

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Studi in Matematica e in Matematica per le Applicazioni- A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del 12-12-2002

1) Data la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{1}{n^p}$$

determinare i valori del parametro reale positivo p per i quali essa converge.

2) Determinare i valori del parametro reale positivo λ per i quali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\,|\log x|^\lambda} \in \mathbb{R}\ . \quad \int_0^{1} \frac{dx}{x\,|\log x|^\lambda} \in \mathbb{R}$$

3) Determinare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}[(|x|+2y)\,y^2]\,.$$

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Studi in Matematica e in Matematica per le Applicazioni- A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del 03-02-2003

1) Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log x + 1}\sqrt{\frac{1}{x^2(-\log^2 x - \log x + 2)}}\,.$$

2) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(x-1)^n}{n\,2^n}$$

determinare l'insieme di convergenza semplice, precisando, poi, se essa converge totalmente in tale insieme. Quindi, detta f la funzione somma di tale serie, calcolare, se lecito,

$$\int_1^3 f(x)\,dx\,.$$

3) Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (y^2 - x^2)\log|y-x| & y \neq x \\ 0 & y = x \end{cases}$$

stabilire in quali punti della retta di equazione $y = x$ essa è continua, in quali ammette derivate parziali prime ed in quali è differenziabile. Determinare poi $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corsi di Studi in Matematica e in Matematica per le Applicazioni- A.A. 2001-02
Prova scritta di Analisi Matematica II del 18-02-2003

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x}\,.$$

2) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(n^2x-nx^2)^2}$$

determinare l'insieme di convergenza semplice, precisando, poi, se essa converge uniformemente in tale insieme. In caso di risposta negativa, dire se
(i) la serie converge uniformemente in insiemi del tipo $]-\delta,\delta[\,\setminus\{0\}$ essendo $\delta>0$
(ii) la serie converge uniformemente in intervalli del tipo $]-\infty,a]$, con $a<0$, e del tipo $[a,+\infty[$, con $a>0$,
(iii) la serie converge uniformemente in intervalli del tipo $[h,k]$, con $h<k<0$ o con $k>h>0$.

3) Calcolare il seguente

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2+y^2}{\operatorname{arctg}\left[\,|x-1|+|y|\right]}$$

Consegna in due ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.