Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 22-05-2000 - c.1

1) Provare che $\sqrt[3]{3}$ è irrazionale.

2) Provare che il grafico di

$$f(x) = (x-1)^{-1} + 2\sin[(x-1)^{-1}] : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$

ammette la retta di equazione $x = 1$ come asintoto verticale. Dire, poi, se f è monotòna in qualche intorno di $x = 1$, giustificando la risposta.

3) Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} - x & x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\\ \sqrt{2x^2+x} & x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right] \\ 0 & x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\end{cases}$$

Trovare gli eventuali punti cuspidali, angolosi e di flesso per il grafico di f.

4) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$2\frac{x-1}{x-2} - x = e^{-x}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

5) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} \frac{3\sin^2 x \cos^2 x}{2\cos^6 x + 2\sin^3 x \cos^3 x + \sin^6 x}\, dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 22-05-2000 - c.2

1) Provare che $\sqrt{2}\,\sqrt{3}$ è irrazionale; cosa può essere detto dell'irrazionalità di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

2) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$2\frac{x-1}{x-2} - x = e^{-x}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3) Sia $y : [0,+\infty[, \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$y(0) = 1,\ y'(x) = y(x)\mathrm{arctg} y(x) \qquad\qquad \forall x \in [0,+\infty[.$$

Provare che
a) y è crescente in $[0,+\infty[$
b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$
c) y non ha asintoti obliqui.

4) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{13\cos^2 x + 8\sin 2x + 4}.$$

5) Sia $y_1 : [0,1] \to [0,+\infty[$ una funzione monotòna e continua. Posto

$$y_{n+1}(x) = \frac{y_n(x)+2}{3y_n(x)+2} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ \forall x \in [0,1]$$

provare che
a) $\frac{1}{3} \leq y_n(x) \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ed ogni $x \in [0,1]$
b) la successione di funzioni (y_n) converge puntualmente in $[0,1]$ ad una funzione y costante.
Dire, poi, se la convergenza di (y_n) è uniforme, giustificando la risposta.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 12-06-2000 - c.1

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(1+x)^5}{x^2}}$$

e disegnarne il grafico.

2) Provare che

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad\qquad \forall x, y \geq 0$$

essendo $p, q \in]1, +\infty[$ tali che $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

3) Sia f una funzione dotata di derivate continue fino a quella seconda in $\mathbb{R}$, tale che

$$f(2) = -1\,,\ f'(2) = 4\,,\ \int_2^3 (3-x) f''(x)\, dx = 7.$$

Calcolare $f(3)$.

4) Provare che, per ogni $a \in]0, +\infty[$, risulta

$$\int_1^a \frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

5) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{arcsen} \log x}{x\sqrt{1+\log x}}\, dx.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 12-06-2000 - c.2

1) Determinare i valori del parametro reale non negativo λ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\left(\lambda+\frac{1}{5}\right)\ldots\ldots\left(\lambda+\frac{1}{2n-1}\right)}$$

converga .

2) Dati $x, y \in [0,+\infty[, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ provare che

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n .$$

Se $n > 1$, quando si ha il segno di uguaglianza?

3) Studiare la funzione

$$f(x) = 2\mathrm{tg}x - \left(9 + 7\frac{x}{|x|}\right)\sin x$$

in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ e disegnarne il grafico.

4) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^{27} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\, dx.$$

5) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{arctg}y}{1+ny^2}\, dy : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

studiarne la convergenza semplice e uniforme in $\mathbb{R}$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000

Prova scritta di Analisi Matematica I - 03/07/2000 - c.1

1) Provare che la successione numerica $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a zero.

2) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\alpha^{2n}}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)^2}\ ,\ \lim_n n^\alpha \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

al variare del parametro reale positivo α (suggerimento: per lo studio del primo limite può essere utile sapere che $\lim_n \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) = +\infty$).

3) Sia data una funzione $f:[a,b]\to[a,b]$ continua. Provare che esiste $\overline{x}\in[a,b]$ tale che $f(\overline{x})=\overline{x}$.

4) Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2(8-x)}$$

e disegnarne il grafico.

5) Determinare il campo di esistenza della funzione

$$F(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left[\frac{1}{t}+\log\frac{|t|-2}{t-1}\right]\,dt.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000

Prova scritta di Analisi Matematica I - 03/07/2000 - c.2

1) Provare che la successione numerica $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a zero.

2) Studiare il carattere delle serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) x^{2n}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-1}+e^{-2}+...+e^{-n}\right)x^{2n}$$

al variare del parametro reale x.

3) Sia data una funzione $f:[a,b]\to[a,b]$ continua. Provare che esiste $\overline{x}\in[a,b]$ tale che $f(\overline{x})=\overline{x}$.

4) Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{1-|\sin x|}$$

e disegnarne il grafico.

5) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si consideri la funzione

$$f_n(t)=n^{\alpha}te^{-nt}:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$$

dove α è un parametro reale positivo. Si dimostri che

i) la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in $[0,+\infty[$ alla funzione identicamente nulla, per ogni $\alpha\in[0,+\infty[$;

ii) la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[0,1]$ alla funzione identicamente nulla se e solo se $\alpha\in[0,1[$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000

Prova scritta di Analisi Matematica I - 13/09/2000

1) Determinare il numero delle soluzioni complesse dell'equazione

$$z^8 = \frac{2|z|^2 + \lambda}{2 + |z|}|z|^7$$

al variare del parametro reale positivo λ.

2) Determinare gli estremi inferiore e superiore dell'insieme numerico

$$X = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{\log \frac{n}{2}}{n} \right) : n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

precisando se si tratta di minimo e massimo. Infine determinare i punti di accumulazione dell'insieme X.

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - x - \frac{1}{2}$$

e disegnarne il grafico.

4) Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$t + e^{1-t^2} = 0$$

5) Determinare i valori del parametro reale non negativo λ tali che

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{(1 - cosx)^\lambda}\, dx \in \mathbb{R}$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 27-09-2000

1) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_{2n}^{2n+1} \frac{\log(1+3t)}{t}\,dt.$$

La serie data converge assolutamente?

2) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $x=0$ tale che esiste $\alpha\in\,]0,+\infty[$ per cui $|f(x)|\le|x|^\alpha$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Dire per quali $\alpha\in\,]0,+\infty[$ la precedente disuguaglianza implica l'esistenza di $f'(0)$ e calcolare tale derivata. Giustificare la risposta.

3) Studiare la funzione

$$f(x)=x+1+(x+1)\log\frac{1}{|x|}$$

e disegnarne il grafico.

4) Dire per quali $h\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{4x+3}}+h & x\ge 0\\ \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+8} & x<0\end{cases}$$

ammette primitive e quindi calcolarle.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 10-11-2000 - C1

1) Utilizzando il Prodotto secondo Cauchy di due serie dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = \sqrt{e}.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x - |\sin x| + \frac{1}{2}\log(1 + \sin x)$$

e disegnarne il grafico.

3) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \lambda\cos^2 x}}\,dx$$

al variare del parametro reale $\lambda \in]-1, +\infty[$.

4) È vero che tutte le primitive di $\cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \cos t\,dt$$

per un opportuno $x_0 \in \mathbb{R}$?
È vero che tutte le primitive di $\frac{1}{x} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sono del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,dt$$

per un opportuno $x_0 \in]0, +\infty[$?
Giustificare le risposte.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 10-11-2000 - C2

1) Trovare le soluzioni $n \in \mathbb{N}$ delle equazioni

$$(-\sqrt{3}+i)^n = 4(1-i\sqrt{3}) \qquad \text{e} \qquad (-\sqrt{3}+i)^n = -8(1+i\sqrt{3})$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x - |\sin x| + \frac{1}{2}\log(1+\sin x)$$

e disegnarne il grafico.

3) Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{1+\lambda\cos^2 x}}\,dx$$

al variare del parametro reale $\lambda \in]-1,+\infty[$.

4) È vero che tutte le primitive di $\cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^x \cos t\,dt$$

per un opportuno $x_0 \in \mathbb{R}$?
È vero che tutte le primitive di $\frac{1}{x} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sono del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{t}\,dt$$

per un opportuno $x_0 \in]0,+\infty[$?
Giustificare le risposte.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del giorno 11-12-2000

1) Dimostrare che

$$\frac{1}{n+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi, utilizzando tale disuguaglianza studiare il comportamento della successione

$$\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

al tendere di n a $+\infty$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$$

e disegnarne il grafico.

3) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, cioé tale che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall \lambda \in [0,1], x, y \in [a,b]$$

Dimostrare che f ha massimo assoluto in $[a,b]$ e che esso viene assunto in uno dei due estremi dell'intervallo $[a,b]$.

4) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}+1}\, dx.$$

5) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si calcoli f' in $[0,1]$. Dire se esiste finito $\int_0^1 f'(x)\, dx$, giustificando la risposta. In caso di risposta positiva, calcolare il valore di tale integrale.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000
Prova scritta di Analisi Matematica I del 12-02-2001

1) Data la successione definita per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{1+a_n^2} & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

2) Sia $n \in \mathbb{N}, n$ dispari. Dire per quali $h \in \mathbb{R}$ la disuguaglianza

$$\sqrt[n]{x+1} - h \leq \frac{x}{n}$$

è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$.

3) Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{|x|}{x}\frac{1}{1+x^2}\right)$$

dire se essa è invertibile nel proprio dominio ed, eventualmente, determinare l'espressione analitica della funzione inversa, precisandone il dominio.

4) Calcolare

$$\lim_n \int_0^1 e^{x^2} \cos nx \, dx$$

5) Data la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} \, dt & x \in]0,1] \end{cases} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

dire in quali punti di $[0,1]$ essa è continua ed in quali punti di $[0,1]$ essa è derivabile. Giustificare le risposte.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000

Prova scritta di Analisi Matematica I - 01/03/2001 - c.1

1) Studiare il seguente insieme numerico

$$X = \left\{ \frac{n}{n^2+36} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

determinandone gli estremi inferiore e superiore, precisando se si tratta di minimo o massimo.

2) Studiare la monotonìa della successione seguente definita per ricorrenza ponendo

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2 \qquad\qquad n \in \mathbb{N};$$

quindi, se monotòna, cercare di determinarne il limite.

3) Siano $\sum a_n$ una serie numerica assolutamente convergente e (b_n) una successione limitata. Provare che $\sum a_n\, b_n$ e $\sum a_n^2$ sono serie assolutamente convergenti. Dire poi se le precedenti implicazioni continuano a valere se l'ipotesi di assoluta convergenza su $\sum a_n$ è sostituita da quella di sola convergenza. Giustificare le risposte.

4) Data una funzione $f\ :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ convessa (o concava) dotata di derivata prima, provare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

Dire poi se il precedente risultato continua a valere senza l'ipotesi "f è convessa (o concava)". Giustificare le risposte.

5) Dire se la funzione seguente

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$$

risulta sommabile in $[0,1[$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1999-2000

Prova scritta di Analisi Matematica I - 01/03/2001 - c.2

1) Provare, attraverso l'uso del Principio di Induzione, che

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \max\left\{\frac{a_i}{b_i} : i = 1, 2, ...n\right\}$$

qualunque siano i numeri reali positivi $a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ con $n \geq 2$.

2) Studiare il seguente insieme numerico

$$X = \left\{\frac{n}{n^2 + 36} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

determinandone gli estremi inferiore e superiore, precisando se si tratta di minimo o massimo.

3) Data la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1 + t^2} dt$$

provare che essa è pari ed uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

4) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x & x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ \sin(2\pi x) & x \in]-1/2, 0] \\ \sqrt{2x^2 + x} & x \in [-1, -1/2] \end{cases}$$

determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo di f, precisando se si tratta di punti di massimo e minimo assoluto.

5) Dire se la funzione seguente

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^4}}$$

risulta sommabile in $[0,1[$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.