Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 14-07-1999 - c.1

1) Sia (d_n) una successione di numeri reali tali che $\inf d_n > 0$. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{1+n^\alpha d_n}$$

al variare del parametro reale positivo α.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2+y^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

determinarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore precisando se si tratta di minimo assoluto e di massimo assoluto.

3) Studiare la regolarità della curva piana γ di equazioni

$$x(t) = 2+\cos^2 t\,,\; y(t) = 2+\cos t \sin t \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e quindi calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2 y}dx + \frac{x\,\mathrm{log}y+1}{xy^2}dy.$$

4) Determinare tutte le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$y' = \sin[y\,\mathrm{arctg}x]\,,\; y(0) = 0.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 14-07-1999 - c.2

1) Data la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$$

con α parametro reale positivo, determinarne il dominio D_α. Dire, poi, per quali valori di α la funzione f_α è prolungabile per continuità a tutto $\overline{D}_\alpha$. Per gli α per i quali tale prolungamento esiste studiare la differenziabilità del prolungamento nei punti di $\overline{D}_\alpha \setminus D_\alpha$.

2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_D (3y^2 - 2x^2 - xy)\log(y-x)dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y - x \leq 4, 0 \leq 2x + 3y \leq 1\}.$$

3) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y + z \\ z' = z \end{cases}$$

4) Siano $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni lipschitziane con $g_1(0) = g_2(0) = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri il problema di Cauchy seguente

$$y' = f_1(x)g_1(y) + \frac{1}{n}f_2(x)g_2(y)\,,\; y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha \in \mathbb{R}$$

e si provi che esso ammette soluzione unica y_n definita in tutto $[a,b]$. Si consideri, poi, il problema di Cauchy seguente

$$y' = f_1(x)g_1(y)\,,\; y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha \in \mathbb{R}$$

e si provi che esso ammette soluzione unica y definita in tutto $[a,b]$. Quindi si dimostri che (y_n) converge uniformemente a y in $[a,b]$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 15-06-1999

1) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^3}{n+x^4}\,\mathrm{tgh}\frac{1}{nx^2+2} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

determinare l'insieme E di convergenza puntuale, precisando se si tratta di convergenza uniforme. Dimostrare, poi, che

$$\lim_n \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \lim_n f_n(x)\,dx$$

(si utilizzino le disuguaglianze $\mathrm{tgh}t \le 1$, $\mathrm{tgh}t \le t$ valide per ogni $t \ge 0$.)

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^6}{(x^2+3y^4)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiare
(i) la continuità di f in $(0,0)$
(ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0,0)$
(iii) la differenziabilità di f in $(0,0)$.

3) Calcolare l'integrale

$$\iiint_D x(x+y+z)(x+y)^2\,dxdydz$$

essendo

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \le 0,\ -x \le y \le 2,\ 1 \le z^2 \le x^2 + (x+y)^2 \le 4\}.$$

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = -\frac{5x^4 + 2xe^y}{x^2e^y + 1}.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 15-06-1999

1) Verificare che l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z - 1 + e^{(x+y)^2+z} = 0\}$$

coincide con il grafico di una funzione $z = z(x, y)$ di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Determinare, quindi, i punti di estremo relativo di tale funzione.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^6}{(x^2+3y^4)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

studiare
(i) la continuità di f in $(0, 0)$
(ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0, 0)$
(iii) la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

3) Calcolare l'integrale

$$\iiint_D x(x + y + z)(x + y)^2 \, dxdydz$$

essendo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, \, -x \leq y \leq 2, \, 1 \leq z^2 \leq x^2 + (x + y)^2 \leq 4\}.$$

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = -\frac{5x^3 + 2e^y}{xe^y + \frac{1}{x}} \qquad x > 0.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 30-06-1999 - c.1

1) Determinare l'insieme E di convergenza della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) x^n.$$

Dire dove si ha convergenza uniforme, giustificando le risposte.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = |x + y|(y^2 + 2\lambda\, y + 1)$$

determinanrne gli estremi relativi ed assoluti al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Dimostrare che la curva di equazioni

$$x(t) = \frac{\cos t}{t}\,,\ y(t) = \frac{\sin t}{t} \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

è regolare e calcolarne la lunghezza.

4) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale seguente

$$y^{(4)} + 4y = \cos x + \sin x.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 30-06-1999 - c.2

1) Assegnate le funzioni

$$f(x) = x - \log(x^2 + 4)\,,\ g(x) = \mathrm{tgh} f(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

si considerino le funzioni

$$d_1(x, y) = |f(x) - f(y)|\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$d_2(x, y) = |g(x) - g(y)|\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dire, giustificando le risposte, se d_1 e d_2 sono metriche su $\mathbb{R}$. In caso di risposta affermativa dire, giustificando le risposte, se $(\mathbb{R}, d_1), (\mathbb{R}, d_2)$ sono spazi metrici completi.

2) Si considerino tutti i rettangoli contenuti nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ con due lati giacenti sugli assi cartesiani, un vertice nell'origine ed il vertice opposto sulla curva di equazione $x^3 + y^3 - 2xy = 0$. Provare che fra essi ve ne è uno di area massima e determinarlo.

3) Provare la misurabilità secondo Peano-Jordan dell'insieme

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y, x^4 \leq y^2 + z^2 \leq 4x^4, 1 \leq x \leq 2\}$$

e poi calcolarne la misura.

4) Provare che la superficie Σ di equazioni

$$x(u, v) = \cos v\,,\ y(u, v) = \cos u + \sin v\,,\ z(u, v) = \sin u \qquad u \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], v \in \left[u - \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi - u\right]$$

è regolare. Scrivere l'equazione del piano tangente al sostegno di Σ nel punto di coordinate $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 14-07-1999 - c.1

1) Sia (d_n) una successione di numeri reali tali che $\inf d_n > 0$. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{1 + n^\alpha d_n}$$

al variare del parametro reale positivo α.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

determinarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore precisando se si tratta di minimo assoluto e di massimo assoluto.

3) Studiare la regolarità della curva piana γ di equazioni

$$x(t) = 2 + \cos^2 t\,,\ y(t) = 2 + \cos t \sin t \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e quindi calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2 y} dx + \frac{x \log y + 1}{x y^2} dy.$$

4) Determinare tutte le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$y' = \sin[y \operatorname{arctg} x]\,,\ y(0) = 0.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 14-07-1999 - c.2

1) Data la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$$

con α parametro reale positivo, determinarne il dominio D_α. Dire, poi, per quali valori di α la funzione f_α è prolungabile per continuità a tutto $\overline{D}_\alpha$. Per gli α per i quali tale prolungamento esiste studiare la differenziabilità del prolungamento nei punti di $\overline{D}_\alpha \setminus D_\alpha$.

2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_D (3y^2 - 2x^2 - xy)\log(y-x)dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y - x \leq 4, 0 \leq 2x + 3y \leq 1\}.$$

3) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y + z \\ z' = z \end{cases}$$

4) Siano $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni lipschitziane con $g_1(0) = g_2(0) = 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri il problema di Cauchy seguente

$$y' = f_1(x)g_1(y) + \frac{1}{n}f_2(x)g_2(y)\,,\; y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha \in \mathbb{R}$$

e si provi che esso ammette soluzione unica y_n definita in tutto $[a,b]$. Si consideri, poi, il problema di Cauchy seguente

$$y' = f_1(x)g_1(y)\,,\; y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha \in \mathbb{R}$$

e si provi che esso ammette soluzione unica y definita in tutto $[a,b]$. Quindi si dimostri che (y_n) converge uniformemente a y in $[a,b]$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 15-09-1999

1) Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

precisando l'intervallo in cui si ha tale sviluppo.

2) Dato l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y, x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2-2y \leq 0\}$$

provare che

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [1,2]\} \subset DE.$$

3) Stabilire, al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, se la funzione

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \log\left(1 + \frac{|x|}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) & x \neq 0 \\ \beta & x = 0 \end{cases}$$

a) è continua in $(0,0)$
b) è differenziabile in $(0,0)$.
Dire inoltre, giustificando la risposta, se la funzione

$$g_{\alpha,\beta}(x,y,z) = z f_{\alpha,\beta}(x,y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

è differenziabile in $(0,0,0)$.

4) Determinare i punti di $x^2+4y^2 = 4$ di massima e minima distanza dalla retta $x+y=4$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 15-09-1999

1) Data la funzione
$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
determinarne gli estremi assoluti nell'insieme
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$
Provare quindi che f è non negativa nell'insieme
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

2) Stabilire, al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, se la funzione
$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \log\left(1 + \frac{|x|}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) & x \neq 0 \\ \beta & x = 0 \end{cases}$$
a) è continua in $(0,0)$
b) è differenziabile in $(0,0)$.
Dire inoltre, giustificando la risposta, se la funzione
$$g_{\alpha,\beta}(x,y,z) = z f_{\alpha,\beta}(x,y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
è differenziabile in $(0,0,0)$.

3) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ definita ponendo
$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt.$$
Provare che esistono F_x, F_y in ogni punto di Ω e determinarle. Trovare quindi un'espressione analitica per F.

4) Sia
$$E = [1, +\infty[\times [1, +\infty[.$$
Data la funzione
$$f_\alpha(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} : E \to \mathbb{R}, \alpha \in]0, +\infty[,$$
dire per quali valori di α si ha l'integrabilità di f_α in E.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 29-09-1999

1) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{\alpha n^2 + n + 1}$$

al variare del parametro reale α in $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{k+1}{k^2}, k \in \mathbb{N}\right\}$.

2) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x) = x^2 + (y^2 + z^2)^2 - yz$$

3) Calcolare l'area della porzione della superficie cartesiana di equazione

$$z = 2 - (x^2 + y^2)$$

contenuta nel solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

4) Risolvere il problema di Cauchy seguente

$$y' = |y| x \sin x + e^{-x \cos x} \cos x \quad , \quad y(0) = 2.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 29-09-1999

1) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0 < b$ e sia

$$X = \{f \in C^1([a,b]) : f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Dimostrare che X è uno spazio di Banach se dotato della norma seguente

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

2) Dimostrare che l'equazione

$$1 + (4 - \sin x)y^2 + x^2 z^3 + 2z = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione continua $z = z(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determinare quindi gli eventuali punti di estremo relativo di z.

3) Sia data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \\ t^2 \sin \frac{1}{t} & t \in \left]0, \frac{2}{\pi}\right] \end{cases}$$

e quindi la curva γ di equazioni parametriche

$$x(t) = t\,,\ y(t) = f(t) \qquad\qquad t \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right].$$

Dire se
a) γ è di classe C^0
b) $x = x(t), y = y(t)$ sono dotate di derivata prima
c) γ è di classe C^1
d) γ è rettificabile.
Giustificare le risposte.

4) Sia γ la curva di equazioni

$$x^2 + y^2 = 1\,,\ x + y + z = 0.$$

Fissato un orientamento su γ, calcolare

$$\int_{+\gamma} [\log(1 + z^2) + y^4]dx + [\log(1 + z^2) + 4xy^3]dy + \log(1 + z^2)dz.$$

Dire se il risultato dipende dall'orientamento prescelto su γ.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 09-12-1999

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{(n+x)^2}$$

studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale in $[0, \infty[$.

2) Data la funzione

$$f_c(x, y) = ye^{x-2y} + cx + 2x^2$$

verificare che l'equazione $f_c(x, y) = 0$ definisce una ed una sola funzione $y_c = y_c(x)$ in un intorno di $x = 0$. Stabilire, poi, per quali valori del parametro c il punto $x = 0$ è punto critico per y_c, studiandone anche la natura.

3) Calcolare l'integrale

$$\iiint_D (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}, dxdy$$

essendo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y,\ x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

4) Risolvere la seguente equazione integrale

$$y(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} - 2\int_0^x ty(t)\,dt.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 09-12-1999

1) Data la funzione
$$f_c(x,y) = ye^{x-2y} + cx + 2x^2$$
verificare che l'equazione $f_c(x,y) = 0$ definisce una ed una sola funzione $y_c = y_c(x)$ in un intorno di $x = 0$. Stabilire, poi, per quali valori del parametro c il punto $x = 0$ è punto critico per y_c, studiandone anche la natura.

2) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -x^2 \leq y \leq x\}$. Disegnare D e provarne la misurabilità secondo Peano-Jordan. Sia, poi, $\overline{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $\overline{g}(x,y) = (x^2 + y, x - y)$; determinare $\overline{g}(D)$. Provare che $\overline{g}$ non è un diffeomorfismo e determinare un aperto $A \supset D$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\overline{g}_{|A}$ sia un diffeomorfismo. Quindi, usando il diffeomorfismo $\overline{g}_{|A}$ calcolare l'integrale
$$\iiint_D (2x+1)(x^2+y)\log(x-y+1)\, dxdy$$

3) Sia C l'arco della curva di equazioni $2z = 16 - x^2 - y^2$, $4 = x + y$ che si trova nell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Provare che in C esistono un punto di minima distanza dall'origine ed un punto di massima distanza dall'origine e determinarli.

4) Risolvere la seguente equazione integrale
$$y(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} - 2\int_0^x ty(t)\, dt.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II. 08-02-2000 - c.1

1) Sia (a_n) una successione crescente di numeri reali positivi. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione

$$f_n(x) = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\, dy \qquad\qquad x \in [0, +\infty[.$$

Dopo aver dimostrato che ogni f_n è continua in $[0, +\infty[$, si studi la convergenza semplice ed uniforme della successione di funzioni (f_n).

2) Determinare i valori dei parametri reali positivi α e β in modo che la funzione

$$f_{\alpha\beta}(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) sia continua nell'origine
ii) sia differenziabile nell'origine.

3) Data l'equazione

$$e^{xy} - (1+x)y^2 = 0$$

stabilire quante funzioni $y = y(x)$ essa definisce implicitamente in un intorno di $x = 0$. Determinare quale di esse ammette $x = 0$ come punto di estremo relativo.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A (x^2 - y)\mathrm{arctg}(x+y)(2x+1)\, dxdy$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 1+y \leq x^2 \leq 2+y, 2-x \leq y \leq 4-y\}.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II. 08-02-2000 - c.2

1) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$

in $\mathbb{R}^3$, precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

2) Data l'equazione

$$x^2 + xy^2 - (1+y)z^2 + e^{yz} = 0$$

stabilire quante funzioni $z = z(x,y)$ essa definisce implicitamente in un intorno di $(x,y) = (0,0)$. Determinare quale di esse ammette $(x,y) = (0,0)$ come punto di estremo relativo.

3) Data la forma differenziale lineare

$$\left[-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{1+(x-y)^2}\right] dx - \left[\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{1+(x-y)^2}\right] dy$$

dire se essa è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed evenualmente calcolarne le primitive.

4) Dire per quali valori del parametro reale positivo α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

è sommabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II. 22-02-2000 - c.1

1) Sia data una funzione $f_1 : [0,1] \to [0,1]$. Posto

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \sin f_n(x) \qquad\qquad \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

studiare la convergenza semplice ed uniforme della successione di funzioni (f_n).

2) Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = (xy + y^2)|y^2 - x|e^{(xy+y^2)|y^2-x|} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

3) Calcolare il volume del solido seguente

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 4 \geq 0, y - x \geq 0, (x-2)^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq y\}.$$

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x} \\ \\ y(0) = 3 \\ \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II. 22-02-2000 - c.2

1) Siano date le funzioni

$$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)\,,\ f_2(x,y) = \log(1+x^2) + \log(1+y^2)$$

di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$. Con centro in $(0,0)$ scrivere la Formula di Taylor di f_1 con resto di Peano del secondo ordine e la Formula di Taylor di f_2 con resto di Peano del quarto ordine. Quindi, utilizzando tali formule, si provi che $(0,0)$ è punto di minimo relativo per la funzione

$$h(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

.

2) Dato l'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 16 = 0\}$$

provare che in A esistono punti di minima distanza dall'origine e calcolarli. In A esistono punti di massima distanza dall'origine ?

3) Data la forma differenziale lineare

$$\frac{x+2y}{x^2+y^2}dx - \frac{2x-y}{x^2+y^2}dy$$

dire se essa è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed evenualmente calcolarne le primitive.

4) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 04-05-2000 per studenti fuori corso

1) Sia data la successione di funzioni (p_n) tutte definite in $[0,1]$ mediante la seguente legge

$$p_1(x) = 0,\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}[x - p_n^2(x)] \qquad \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Provare che
(a) $0 \le p_n(x) \le \sqrt{x} \qquad \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$
(b) $p_n(x) \le p_{n+1}(x) \qquad \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$
(c) (p_n) converge uniformemente a $\sqrt{x}$ in $[0,1]$.

2) Determinare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y) = [-1 + |y|(x^2 + y^2 - 2x)] \operatorname{arctg}[-1 + |y|(x^2 + y^2 - 2x)]$$

nel suo dominio.

3) Dire se la forma differenziale lineare

$$\left[\log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right] dx + \frac{2xy}{x^2 + y^2} dy$$

è esatta nel proprio dominio ed eventualmente calcolarne le primitive.

4) Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di derivata prima e di derivata seconda in $\mathbb{R}$ tale che

$$y''(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} y'(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e con $y'(0) > 3$. Provare che y non ha punti di estremo relativo in $\mathbb{R}$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.