Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 25-5-1998 - c.1

1) Per ogni numero $n \in N, n \geq 2$, siano dati $2n$ numeri reali positivi $a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$.

Provare, usando il Principio di Induzione, che

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \max\left\{\frac{a_i}{b_i} : i = 1, 2, ...n\right\}.$$

2) Calcolare il massimo ed il minimo limite della successione seguente

$$a_n = \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{4(n+1)} & n = 3h, h \in N, \\ \left(\sin \frac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg}\left[\left(n!\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right] & n = 3h+1, h \in N, \\ \frac{(n+1)^n(n+2)}{n^{n+1}} & n = 3h+2, h \in N, \end{cases}$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(8-x)}$$

e disegnarne il grafico.

4) Posto, per ogni $x \in R$,

$$F(x) = \int_0^x (2t+1)(2t-1)e^{-t^2+t}dt - 4\int_0^x te^{-t^2+t}dt$$

calcolare

$$\int_0^1 F(x)dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 25-5-1998 - c.2

1) Dire se la serie numerica seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

converge ed, in tale caso, calcolarne la somma.

2) Sia $f : R \to R^+$ una funzione limitata tale che:

(i) $\inf_R f(x) > 0$

(ii) $f(x+y) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in R$.

Provare che $f(nx) = [f(x)]^n$ per ogni $x \in R, n \in N, n \geq 1$, e dedurne che $f(x) = 1$ per ogni $x \in R$.

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$$

4) Date le funzioni

$$g_n(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{|x|^3 + (n+1)^{-2}}} \qquad x \in [-1, 1], n \in N,$$

calcolare, se esistono, i limiti seguenti

$$\lim_n \int_{-1}^{1} g_n(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_n \int_{-1}^{1} |g_n(x)| dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 25-5-1998 - c.3

1) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n^2}^{2n^2} \frac{dx}{(x^\alpha + 1)^\beta}$$

al variare dei parametri reali positivi α e β.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\,|\ln|x||^{\frac{1}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico.

3) Determinare la equazione differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti che ammette il seguente integrale generale

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \ln x$$

4) Sia $f : R \to R$ una funzione uniformemente continua, non identicamente nulla. Posto

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n+1}\right) \qquad \forall x \in R, n \in N$$

studiare la convergenza semplice ed uniforme della successione (f_n).

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 16-6-1998 - c.1

1) Risolvere, in $\mathbf{C}$, il seguente sistema

$$\begin{cases} z^2\overline{z} - z\overline{z} = -\overline{z} \\ \\ (z^3 + \overline{z})^3 = 1 \end{cases}$$

2) Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni limitate di numeri reali non negativi. Provare che si ha

$$\limsup_n a_n b_n \leq \limsup_n a_n \limsup_n b_n.$$

Portare poi esempi di successioni limitate $(a_n), (b_n)$ di numeri reali non negativi tali che

$$\limsup_n a_n b_n < \limsup_n a_n \limsup_n b_n.$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$$

e disegnarne il grafico.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\log[(1 + \sin x)^{\sin x}]}{\operatorname{tg} x} dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 16-6-1998 - c.2

1) Determinare, in $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{x^k}{(x+1)^{k+1}}$$

e quindi la sua funzione somma.

2) Siano $f : (a, b) \to R$ una funzione convessa ed $x_0 \in]a, b[$ tali che $f'_-(x_0) = 0$ (oppure $f'_+(x_0) = 0$). Provare che x_0 è un punto di minimo assoluto per f.

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{\sqrt{1 - 2\cos x}}$$

e disegnarne il grafico.

4) Data l'equazione differenziale

$$y' = 4x\sqrt{y-2}$$

provare che se y è una sua soluzione il cui insieme di definizione contiene il punto $x = 0$, allora essa ha un minimo relativo in tale punto. Determinare poi, se ne esistono, soluzioni dell'equazione data che hanno $x = 0$ come unico punto di minimo relativo.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 16-6-1998 - c.3

1) Dire per quali valori del parametro $\lambda \in R$ i seguenti insiemi numerici

$$X = \left\{ \frac{n}{n^2+36} : n \in N, n \geq 1 \right\}, \quad Y = \left\{ \frac{\lambda}{2(1+x^2)} + (\lambda + |\lambda|) : x \in R \right\}$$

sono separati e per quali valori del parametro $\lambda \in R$ essi sono anche contigui.

2) Sia $f : (a,b) \to]0,+\infty[$ una funzione uniformemente continua. Dire, giustificando la risposta, se la funzione $g = \frac{1}{f}$ è uniformemente continua. In caso di risposta negativa, determinare una condizione su f sufficiente per la uniforme continuità di g.

3) Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}, \qquad n \in N.$$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 6-7-1998 - c.1

1) Dimostrare, attraverso l'uso del Principio di Induzione, che il prodotto $n(n+1)(n+2)(n+3)$ è divisibile per 4, per ogni $n \in N$.

2) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{y \to 1} \frac{\log(y^5)[\sqrt[5]{y}-1]}{\sin^2(5(y-1)) + \sqrt[3]{(y-1)^4}\sin(y-1)}.$$

3) Sia assegnata la funzione seguente

$$f(x) = x\sqrt[3]{x(x-1)}.$$

Motivando le risposte, dire

a) in quali punti del dominio esiste f', calcolandola, ed in quali punti non esiste,

b) in quali punti del dominio esiste f'', calcolandola, ed in quali punti non esiste.

4) Calcolare l'integrale indefinito seguente

$$\int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 6-7-1998 - c.2

1) Determinare il minimo limite ed il massimo limite della successione

$$\left((-1)^n \frac{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}}{n} \int_{\sqrt{\ln n}}^{\sqrt{\ln(n+1)}} e^{2t^2}\,dt\right)_{n\in N, n\geq 1}.$$

2) Sia $(c_n) \subset\ ]0,+\infty[$ tale che esista $K \in [0,1[$ con $\frac{c_{n+2}}{c_n} < K$. Provare, facendo uso di risultati noti, che la serie $\sum c_n$ converge.

3) Sia assegnata la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2(5-x)}.$$

Provare che la sua restrizione $f_{|X}$ all'insieme $X = [3,+\infty[$ è invertibile, determinando l'insieme $Y = f(X)$. Detta $g : Y \to X$ la funzione inversa di $f_{|X}$, dimostrare che per ogni $y \in \overset{o}{Y}$ esiste $g'(y)$; infine, calcolare $g'(0)$.

4) Trovare una funzione $f : R \to]0,+\infty[$ derivabile, tale che $f(0) = 1$ e verificante la identità seguente

$$[f(x)]^2 = \int_0^x [f(t)]^2 \frac{\sin t}{2+\cos t} dt + 1 \qquad \forall x \in R.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 6-7-1998 - c.3

1) Provare che

$$\lim_n \frac{(2n-1)!!}{n!2^n n} = 0$$

e quindi studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!2^n n} z^n \qquad\qquad z \in C$$

2) Sia $g : (a,b) \to R \setminus \{0\}$ una funzione arbitraria. Provare che

$$h(x) = 1 - g(x)\text{arctg}\frac{1}{g(x)} > 0 \qquad\qquad \forall x \in (a,b).$$

Calcolare, poi, $\inf_{(a,b)} h$, sotto l'ulteriore ipotesi che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

3) Data la funzione

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[\frac{1}{t} + \log\frac{|t|-2}{t-1}\right] dt$$

a) determinare il campo di esistenza di F,

b) determinare eventuali asintoti per F.

4) Calcolare l'integrale indefinito seguente

$$\int (\cos x)^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2}\log\cos x - x\text{tg}x\right] dx.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 7-9-1998 - c.1

1) Scrivere in forma algebrica le radici quadrate del numero complesso $z = 1 + i4\sqrt{3}$.

2) Sia data la funzione

$$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - (x-4)^{\frac{1}{3}}.$$

Provare che il suo grafico

(i) ammette un punto cuspidale;

(ii) ammette almeno due punti di flesso, uno dei quali con tangente verticale.

3) Sia data la funzione

$$f(x) = \int_1^{\mathrm{tg}x} (1 + \log t)dt \qquad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Provare che

(i) f è crescente;

(ii) la funzione $F(x) = \frac{1}{1+f(x)}$ è uniformemente continua in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1}$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 7-9-1998 - c.2

1) Provare che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} e^{t^2} dt = +\infty$$

e quindi calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^4} \int_x^{x^2} e^{t^2} dt.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

e disegnarne il grafico.

3) Date le funzioni

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \qquad \alpha \in]0,+\infty[, x \in [1,+\infty[$$

provare che esse sono tutte integrabili in senso improprio in $[1,+\infty[$ e quindi calcolare

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_1^{+\infty} f_\alpha(x) dx.$$

4) Siano g e $g_n, n \in \mathbb{N}$, delle funzioni definite in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ tali che la successione (g_n) converga uniformemente a g. Sia, poi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione arbitraria. Dire sotto quale delle ipotesi seguenti la successione $(f(g_n))$ converge uniformemente a $f(g)$

(i) f è continua;

(ii) f è uniformemente continua;

(iii) f è continua ed esiste una costante $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $|g(x)| \le M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Giustificare le risposte.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 7-9-1998 - c.3

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \cos 2x + 2\cos x$$

e disegnarne il grafico.

2) Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ seguente

$$X = \left\{ (x, y) : x \geq 2, \frac{1}{x+2} \leq y \leq \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \right\}$$

dire se

(i) $X \neq \emptyset$;

(ii) X è misurabile secondo Peano-Jordan ed in caso di risposta positiva calcolare $mis(T)$.

Giustificare le risposte.

3) Provare che le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = e^x$$

non ammettono punti di estremo relativo.

4) Sia data la successione di funzioni $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite mediante la legge seguente

$$p_0(x) = 0\,,\; p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}[x - p_n^2(x)] \qquad x \in [0,1].$$

provare che

(i) $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x} \qquad \forall x \in [0,1]$;

(ii) (p_n) è non decrescente;

(iii) (p_n) converge uniformemente a $p(x) = \sqrt{x}$ in $[0, 1]$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 28-9-1998 - c.1

1) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin x \cos x}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = x^2 \log x - 2x$$

studiarla e disegnarne il grafico.

3) Sia data una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \qquad\qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Provare che esiste un suo prolungamento per continuità $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}$ tale che

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq |x - y| \qquad\qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\int (1 + \mathrm{tg} x)^2 e^{2x} dx$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 28-9-1998 - c.2

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$$

e disegnarne il grafico.

3) Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, provare che f è continua in $\mathbb{R}$. Supponendo, poi, che f sia derivabile in $\mathbb{R}$ provare che f è costante in $\mathbb{R}$.

4) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{(5-\sin x+\cos^2 x)^2}\,dx.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 10-12-1998 - c.1

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+nx^n}{n^2+x^{2n}}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = 1 + \cos x + \sin x + \sin x \cos x$$

e disegnarne il grafico.

3) Data la funzione

$$f(x) = |\sin^3 x|$$

dire se esiste $f'(0)$ ed eventualmente calcolarla. Nel caso in cui $f'(0)$ esista, dire quale delle derivate successive di f esiste nel punto $x = 0$, calcolandola.

4) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

dire se è integrabile in $[-1, 1]$ ed eventualmente calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 10-12-1998 - c.2

1) Calcolare

$$\lim_n \frac{\ln n!}{n \ln n}.$$

2) Studiare al funzione

$$f(x) = |x| + \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

e disegnarne il grafico.

3) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2y}}$$

provare che, se y è una soluzione definita in un intervallo contenente il punto $x = 0$, allora essa è concava in un intorno di tale punto.

4) Data la funzione continua

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

dire se è sviluppabile in serie di Mac Laurin in $\mathbb{R}$ ed eventualmente scrivere tale sviluppo.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 10-12-1998 - c.3

1) Determinare gli estremi inferiore e superiore dell'insieme numerico

$$X_\lambda = \left\{ \frac{2x^2 + \lambda x - 8}{x-2} : x \in [2,4] \right\}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Assegnata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(e^{x-1}-1)} & |x| \leq 1 \\ -\sqrt{x^2 - x} & |x| > 1 \end{cases}$$

a) studiare la continuità e la derivabilità di f in $\mathbb{R}$,

b) determinare gli eventuali punti di estremo relativo di f,

c) dire, giustificando la risposta, se f ha punti di estremo assoluto in $[-1,2]$ ed eventualmente calcolarli.

3) Determinare le primitive della funzione

$$g(x) = \frac{|x| + 2}{(4 + x|x|)(x^2+1)}$$

nell'intervallo $[-1,1]$.

4) Posto

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n-x)^2 + 1}{(n-x)^2 + (n-x) + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

a) determinare l'insieme E di convergenza semplice della successione (f_n),

b) provare che (f_n) converge uniformemente in $[0,1]$,

c) dire, giustificando la risposta, se (f_n) converge uniformemente in E.

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 09-02-1999

1) Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n} + \log(1 + \sqrt{a_n})}{2}$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \text{arcsen}(x^2 + |2x + 1|)$$

e disegnarne il grafico.

3) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \in [0, 1] \\ \\ 2 + (x - 1)^2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Provare che essa è iniettiva e suriettiva da $[0, 2]$ su $[1, 3]$. Detta f^{-1} la sua funzione inversa, provare che il punto di coordinate $(2, 1)$ è punto angoloso per il grafico di f^{-1}, scrivendo le equazioni delle rette tangenti a tale grafico in tale punto.

4) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int [(xe^x + e^x)\log^2 x - 2e^x x^{-1}]dx$$

5) Studiare la convergenza puntuale e la convergenza totale della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2 + 3n^4 x^2}.$$

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 1997-98

Prova scritta di Analisi Matematica I del 01-03-1999

1) Dato $a \in]0, \pi[$, si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + \sin x_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dire se essa converge ed eventualmente calcolarne il limite. Giustificare le risposte.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \int_x^1 \log t \sqrt[3]{t-3}\, dt$$

e disegnarne il grafico.

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^3 \arccos^2(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$$

4) Date le funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite, per $n \in \mathbb{N}$, ponendo

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{\sin(nx)}{2^n} & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione (f_n).

Consegna in tre ore. È vietato uscire dall'aula durante il compito. È vietato consultare appunti, fotocopie, libri.