CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 13-02-2008. C1

1) Determinare il campo di esistenza X della funzione

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2\,|z|) - \arcsin(x^2 + y^2\,|z|)$$

e dimostrare che X è chiuso. È anche limitato? Trovare, quindi, gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f in X.

2) Data la funzione

$$g(x,y) = (x-2)^2 + e^y - y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $g(x,y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinare eventuali punti critici per y precisandone la natura.

3) Data la funzione

$$h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

provare che la sua restrizione all'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0), y \geq 0, x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ è limitata e quindi calcolare l'integrale di h su E.

4) Calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_\gamma \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}\,dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}\,dy$$

essendo γ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

5) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2ay' + (a^2 - a + 1)y = e^{-x}$$

al variare del parametro reale a

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

precisando in quale sottintervallo di $]0, +\infty[$ è definita ognuna delle sue soluzioni.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 13-02-2008. C2

1) Determinare il campo di esistenza X della funzione

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2\,|z|) - \arcsin(x^2 + y^2\,|z|)$$

e dimostrare che X è chiuso. È anche limitato? Trovare, quindi, gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f in X.

2) Data la funzione

$$g(x,y) = (x-2)^2 + e^y - y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $g(x,y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinare eventuali punti critici per y precisandone la natura.

3) Data la funzione

$$h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

provare che la sua restrizione all'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0), y \geq 0, x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ è limitata e quindi calcolare l'integrale di h su E.

4) Calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_\gamma \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,dy$$

essendo γ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

5) Scrivere le equazioni parametriche della curva intersezione della semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, con il piano $x + y = 1$ e calcolarne la lunghezza

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ \\ y_2' = -2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ \\ y_3' = y_2 - y_3 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 05-03-2008

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità in tutto $\mathbb{R}^2$.

2) Data la funzione

$$g(x,y) = y^5 + \log\frac{x+y}{2} - xy : \{(x,y) \in r^2, x+y > 0\} \to \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $g(x,y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita y avente per dominio un intervallo di centro il punto $x = 1$. Quindi dire se tale punto è punto di estremo relativo per essa, precisandone la natura.

3) Si consideri l'insieme piano A limitato dalle curve

$$y = x^4 - 1, y = x^4 + 1, y = -2x^2, y = -2x^2 + 2$$

e si calcoli il seguente integrale doppio

$$\int\!\!\int_A (x^3 + x)(2y + 2x^2 - x^4)\, dx\, dy$$

4) Data la forma differenziale lineare seguente

$$\frac{y^2}{x^2y^2 + (x+y)^2}\, dx + \frac{x^2}{x^2y^2 + (x+y)^2}\, dy$$

determinarne il campo di esistenza e quindi dire se essa è ivi esatta, giustificando la risposta.

5) Nel piano $y = 0$ sia data la curva di sostegno γ avente le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sin t - \cos t \\ z(t) = \cos t + \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$$

Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare γ attorno all'asse $\vec{z}$ di un angolo giro.

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\, y' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

in un intorno del punto $x = 1$. Esiste soluzione unica?

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 29-04-2008

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \\ (x-\pi)^2 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

scriverne la serie di Fourier e provare che essa converge puntualmente ad f in $[-\pi, \pi]$. Si ha convergenza uniforme? Dedurre, poi, la somma delle serie numeriche $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, n^{-2}$.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+4y^2} + x & xy > 0 \\ \\ xy + x & xy \leq 0 \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità in tutto $\mathbb{R}^2$.

3) Determinare i punti della curva algebrica di equazione

$$x^4 + x^2 + y^2 - 2 = 0$$

che hanno minima e massima distanza dall'origine, se esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale triplo

$$\iiint_A z\, dx\, dy\, dz$$

essendo $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 2^{-1}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5) Data la forma differenziale lineare seguente

$$\frac{x^2 + y^2 + 2x}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x^2 y^2 + y^4 + 2y}{x^2 + y^2}\, dy$$

calcolarne l'integrale curvilineo esteso al cammino di equazioni parametriche

$$x(t) = 1 + 2\cos t,\ \ y(t) = \sin t,\ \ t \in [0, \pi].$$

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 06-06-2008

1) Data la funzione
$$f(x) = xy\,\sqrt[4]{x^2+y^2}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
studiare l'esistenza e la continuità delle sue derivate direzionali in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Dire, quindi, in quali punti essa è differenziabile, giustificando la risposta.

2) Data la funzione
$$f(x,y) = y^3 + 2y + e^{y-x^2} + x^2 - \cos(y-x) + h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $f(1,1) = 0$. Per tali valori dire se l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $x = 1$. In caso di risposta positiva, studiare la natura di tale punto per la funzione implicita.

3) Data la funzione
$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
determinare i punti di estremo relativo vincolato di f sotto la condizione
$$g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$
se ne esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale doppio
$$\iint_A t^5\, y^{-2}\, dt dy$$
essendo $A = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^3 \le y \le 2t^3\,, t^3 + 2y \ge 1\,, t^3 + y \le 1\}$.

5) Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$y' = \frac{x^2 + y^2 + 2x}{2y}\,, \qquad y(1) = 1.$$

6) Risolvere il seguente sistema
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \\ y_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 06-06-2008

1) Data la funzione

$$f(x,y) = xy\,\sqrt[4]{x^2+y^2}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

studiare l'esistenza e la continuità delle sue derivate direzionali in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Dire, quindi, in quali punti essa è differenziabile, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = y^3 + 2y + e^{y-x^2} + x^2 - \cos(y-x) + h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $f(1,1) = 0$. Per tali valori dire se l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $x = 1$. In caso di risposta positiva, studiare la natura di tale punto per la funzione implicita.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo relativo vincolato di f sotto la condizione

$$g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$

se ne esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_A t^5\, y^{-2}\, dtdy$$

essendo $A = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^3 \le y \le 2t^3\,, t^3 + 2y \ge 1\,, t^3 + y \le 1\}$.

5) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{x^2 + y^2 + 2x}{2y}\,, \qquad y(1) = 1.$$

6) Risolvere il seguente problema

$$y'' - 2y' + y = e^x\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{xe^x} = 0$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 27-06-2008

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-1}\,|y|^{\alpha}\,\sin x & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

studiarne la continuità e la differenziabilità nell'origine, al variare del parametro reale positivo α.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = y^2 - 3xy + 2x^2 - (x-1)e^{x-y} \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dire quante funzioni implicite l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno del punto $x = 1$. Determinare la natura del punto $x = 1$ per tali funzioni.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = (y - \mathrm{arctg}x)^2(x^4 - x^6) \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinarne i punti di estremo relativo, se ne esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\int\!\!\int_A y^5\,(x^2+y^6)^{-1}\,dxdy$$

essendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^6 \leq 2, x \geq y^3 \geq -1, x \geq 0\}$.

5) Risolvere l'equazione differenziale seguente

$$x^2\,y'' - xy' + y = x^3$$

6) Dire se la forma differenziale lineare seguente

$$[y(y^2-x^2)(y^2+x^2)^{-2}]\,dx + [x(x^2-y^2)(y^2+x^2)^{-2}]\,dy$$

è esatta ed eventualmente calcolarne le primitive.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 09-09-2008

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo assoluto nell'insieme

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1, x > 0, y > 0\}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{x-y} - 1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

provare che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno dell'origine una funzione implicita. Determinare la natura del punto $x = 0$ per tale funzione.

3) Data la curva piana di equazioni

$$x(t) = 10(t - t^2), y(t) = \sin(2\pi t), t \in [0,1]$$

determinare l'area della porzione di piano racchiusa dal sostegno della curva.

4) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_A \log(2x^2 + y^2 + 1)\, dxdydz$$

essendo

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x^2 + y^2 \leq 4, z \leq 2x^2 + y^2 + 1\}$$

5) Si calcoli il seguente integrale di superficie

$$\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma$$

essendo A la porzione di superficie laterale del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ compresa fra i piani di equazione $z = 0$ e $z = 1$.

6) Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari seguente

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 07-11-2008. C1

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^6}{(x^2+3y^4)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiare
(i) la continuità di f in $(0,0)$
(ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0,0)$
(iii) la differenziabilità di f in $(0,0)$.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = (x+y)|y-x^2| - e^{(x+y)|y-x^2|}$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Dire se la curva di equazioni parametriche

$$x(h) = \sin h \quad , \quad y(h) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{h} \sqrt{1-2\cos t}\,dt \qquad h \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

è regolare ed in tale caso calcolarne la lunghezza. La curva data è anche semplice ? Giustificare le risposte.

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A \frac{1}{xy} dxdy$$

essendo $A = \{(x,y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, -2(x-1) \leq y \leq -2(x-2)\}$

5) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale seguente

$$\frac{x^4+y^4+2xy(xy-1)}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

esteso alla curva γ di equazioni parametriche $x = x, y = \cos x$ con $x \in [0, 2\pi]$

6) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 07-11-2008. C2

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^6}{(x^2+3y^4)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiare
(i) la continuità di f in $(0,0)$
(ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0,0)$
(iii) la differenziabilità di f in $(0,0)$.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = (x+y)|y-x^2| - e^{(x+y)|y-x^2|}$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Dire se la curva di equazioni parametriche

$$x(h) = \sin h \quad , \quad y(h) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{h} \sqrt{1-2\cos t}\, dt \qquad h \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

è regolare ed in tale caso calcolarne la lunghezza. La curva data è anche semplice ? Giustificare le risposte.

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A \frac{1}{xy} dxdy$$

essendo $A = \{(x,y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, -2(x-1) \leq y \leq -2(x-2)\}$

5) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale seguente

$$\frac{x^4+y^4+2xy(xy-1)}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

esteso alla curva γ di equazioni parametriche $x = x, y = \cos x$ con $x \in [0, 2\pi]$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = xy + x\sqrt[4]{y} \quad , \quad y(0) = 1$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 05-12-2008

1) Studiare la continuità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate direzionali della funzione

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

nell'origine.

2) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se esistono, della funzione

$$f(x,y)=x^4-x^2y^2$$

nell'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leq 1, y\geq x^2-1\}$.

3) Data la funzione

$$f(x,y)=e^y+x^2e^{-x}y+c:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

dire per quali valori del parametro $c\in\mathbb{R}$ l'equazione $f(x,y)=0$ definisce un'unica funzione implicita $y=y(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Posto, poi, $c=-2$ dire se la funzione implicita ottenuta ha punti di estremo relativo.

4) Data la forma differenziale lineare

$$\left(\frac{\log(1+y^2)}{\sqrt{x}}+\phi(x,y)\right)dx+\left(\frac{y\sqrt{x}}{1+y^2}+\cos y\right)dy$$

essendo $\phi\in C^1(\mathbb{R}^2)$, studiarne l'esattezza nel proprio campo di esistenza in funzione di ϕ, determinandone poi le eventuali primitive.

5) Calcolare l'integrale triplo della funzione

$$f(x,y,z)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

esteso all'insieme

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x\geq 0, y\geq 0, 0\leq z\leq 1, z^2\leq x^2+y^2\leq z\}$$

6) Trovare l'area della porzione di superficie di equazione cartesiana

$$y=1+x^2+z^2$$

con $y\leq 2$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 12-02-2010

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^2+1}{2} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

provare che è possibile prolungarla a tutto $\mathbb{R}$ in modo che il prolungamento $\tilde{f}$ sia pari e di periodo 4. Quindi dire se $\tilde{f}$ è sviluppabile in serie di Fourier e, nel caso di risposta affermativa, calcolare la serie di Fourier di $\tilde{f}$.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{(x+1)(x-3y^2)}{|y|+3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dire in quali punti dell'asse $\vec{x}$ essa ammette derivate parziali, giustificando la risposta.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x|x-y| + e^{1-x|x-y|} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo, precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

4) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - ye^{yx^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $f(x, y) = 0$ permette di definire un'unica funzione implicita $y : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ avente il punto $x = 0$ come punto di minimo assoluto.

5) Calcolare l'integrale triplo seguente

$$\int\int\int_A \frac{4x^2}{\sqrt{z}}\, dxdydz$$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \ge 0, 0 \le 2 - \sqrt{z} \le x^2 + y^2 \le z\}$.

6) Studiare l'esattezza (ed eventualmente trovare le primitive) della forma differenziale lineare

$$\left[\frac{x}{x^2+2y^2-9} - x\right] dx + \left[\frac{2y}{x^2+2y^2-9} + y\right] dy$$

nel proprio campo di esistenza.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 05-03-2010

1) Trovare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4\,|y|^\alpha}{x^8+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dire se è continua, derivabile parzialmente e differenziabile in $(0,0)$ al variare del parametro reale positivo α.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo assoluto della restrizione di f all'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 3 = 0\}$, dopo aver provato che E è chiuso e limitato.

4) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{2x}\log(e + 2xy) - e^y \log(e - 2xy) - 2\sin x$$

determinarne il campo di esistenza E e dimostrare che l'equazione $f(x,y) = 0$ permette di definire un'unica funzione implicita $y = y(x)$ definta in un intorno del punto $x = 0$. Quindi calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\sin(2x)}$$

5) Calcolare l'area dell'insieme piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \leq 0\}$$

dopo averne provato la misurabilità secondo Lebesgue.

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 05-03-2010

1) Trovare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(|x|+|y|)\,\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dire se è continua, derivabile parzialmente e differenziabile in $(0,0)$ giustificando le risposte.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo assoluto della restrizione di f all'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 3 = 0\}$, dopo aver provato che E è chiuso e limitato.

4) Data la funzione

$$f(x,y) = (x+y)^3 + e^{x^3+y^3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $f(x,y) = 0$ permette di definire un'unica funzione implicita $y = y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avente le seguenti proprietà:

(i) $y(x) + x < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $-1 < y(x) + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) y è monotòna in $\mathbb{R}$

(iv) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$,

(v) $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = -1$

(vi) (facoltativo) y ammette asintoti obliqui sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

5) Calcolare l'area dell'insieme piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \leq 0\}$$

dopo averne provato la misurabilità secondo Lebesgue.

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 28-06-2010

1) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha + y^\beta}{x^2 + y^4}$$

al variare dei parametri reali positivi α, β e con $x, y > 0$.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dire se è continua, derivabile parzialmente, differenziabile in $(0,0)$.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = 1 - x^3 + 12\sqrt{x^2+y^2} \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo assoluto nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$, giustificando le risposte date.

4) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy$$

esteso alla curva di equazione cartesiana $x^4 + y^4 = 1$.

5) Data la funzione

$$f(x,y) = (x - yx, 2xy) \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

determinare $f(\mathbb{R}^2)$ e quindi dire se essa è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^2$ su $f(\mathbb{R}^2)$. In caso di risposta negativa, determinare una sua restrizione ad un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ che sia adesso un diffeomorfismo, giustificando la scelta fatta.

6) Dato il cerchio del piano xy di centro $(1,0)$ e raggio $r = 1$, calcolare il volume del solido generato dalla sua rotazione attorno all'asse $\vec{y}$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 14-07-2010

1) Calcolare la somma della serie di funzioni seguente

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2^{k+2}\,(k+1)!}$$

giustificando le risposte.

2) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+3|x|^3) - \operatorname{arctg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

3) Data la funzione

$$f(x,y) = |x-y|\,(y - x^2 + 1)$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto sia in $\mathbb{R}^2$ che nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + yx^3\right] dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$$

esteso alla curva di equazione cartesiana $x^4 + y^4 = 1$.

5) Calcolare il volume del solido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 100, z - y + 1 \geq 0, y + 4 \geq 0\}.$$

6) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + e^{2x}\,\cos x \end{cases}$$

oppure, solo per coloro che non avessero i sistemi di equazioni differenziali lineari nel proprio programma, l'equazione

$$y'' - 4\,y' + 5\,y = e^{2x}\,\cos x$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 09-09-2010

1) Studiare la convergenza semplice ed uniforme della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{2^n\, n^4+1}\left[\frac{4x^2+2x+1}{x^2+1}\right]^n$$

2) Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\log(1+x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali, la differenziabilità nell'origine.

3) Data la funzione

$$f(x,y)=y\,e^{x^2}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto nell'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2, xy\leq 1\}$.

4) Calcolare la lunghezza del grafico della funzione

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}-1}\,dy \;:\; \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}\,.$$

5) Calcolare il volume del solido

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+2\,y^2-z\geq 0, x^2+2\,y^2-2z\leq 0, z\leq 1\}.$$

6) Determinare una funzione $\phi\in C^1(\mathbb{R})$ con $\phi(0)=0$ in modo che la forma differenziale lineare seguente

$$[2x+\phi(y)]\,dx+[x(y-\phi(y))]\,dy$$

risulti esatta in $\mathbb{R}^2$. Quindi trovare quella primitiva $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che $U(0,0)=0\,.$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 30-09-2010

1) Dire in quale insieme $X \subset \mathbb{R}$ converge puntualmente la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{(}(x-1))\,(1+x)^k$$

C'è convergenza uniforme in $]-1,0[$? C'è convergenza uniforme in $]-2,-1[$?

2) Dati l'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$ e la funzione $f(x,y,z) = 2x + y + z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ trovare l'insieme $f(A)$.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{|x|^3 + |y|^3}$$

dimostrare che è prolungabile per continuità nell'origine e quindi studiare la differenziabilità del prolungamento nello stesso punto.

4) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto della funzione

$$f(x,y) = xy^2 - e^{xy^2}$$

nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio $r = 1$.

5) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{dx}{1+y^2} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\,dy$$

esteso alla curva di equazioni $x(t) = e^{\sin t}, y(t) = \frac{2\cos t}{1+\cos^2 t}$, con $t \in [0,\pi]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x}{y}\,dxdy$$

essendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x \leq 4y, 1 \leq x^2y^2 \leq 4\}$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 03-12-2010

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x^2)x^{2n}$$

determinarne l'insieme E di convergenza puntuale. Dire, poi, se la convergenza in E è anche uniforme, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \\ \frac{x^2y+y^2z+z^2x}{x^2+y^2+z^2} & \text{altrove} \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità nell'origine.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = 1 - x^3 + 12\sqrt{x^2+y^2}$$

determinarne i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = 3$.

4) Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{x}$$

esteso all'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le y, 9(x^2+y^2) \le 4\}$$

5) Siano

$$x(t) = 10(t-t^2),\ y(t) = \sin(2\pi t) \qquad t \in [0,1]$$

equazioni parametriche di un cammino chiuso $\mathcal{C}$. Dire se $\mathcal{C}$ è semplice e/o regolare, giustificando la risposta. Quindi calcolare l'area della parte di piano racchiusa dal sostegno del cammino $\mathcal{C}$, usando le Formule di Gauss-Green.

6) Data la forma differenziale seguente

$$\frac{x+qy}{x^2+y^2}\,dx + \frac{rx+sy}{x^2+y^2}\,dy$$

determinare il valore di ognuno dei parametri $q, r, s \in \mathbb{R}$ in modo che essa sia esatta nel proprio campo di esistenza e quindi trovarne le primitive.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 11-02-2011

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 \log\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

determinandone il raggio di convergenza ed il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. Trovare, poi, i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie diverge e quelli per cui è indeterminata, giustificando la risposta.

2) Calcolare, se esistono, i limiti seguenti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^3 y}-1}{x^2+y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2\,|y|}$$

3) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, della funzione

$$f(x,y) = e^{-\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|} \,:\, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

4) Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^2 + 4y \leq 0\}$$

e dire se in esso vi sono punti di minima distanza e punti di massima distanza dalla retta di equazione

$$3x - 2y + 4 = 0$$

giustificando la risposta. Eventualmente calcolarli.

5) Dopo aver provato la misurabilità dell'insieme piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1 \leq 3x^2 - y^2 \leq 2\}$$

calcolarne la misura.

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -x + y + e^{3t} \\ y' = -x + 4y \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 25-02-2011

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left[e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right]$$

determinandone il raggio di convergenza ed il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

2) Studiare la differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha\, y}{\sin(x^2+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

al variare del parametro reale positivo α.

3) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 3xy + 2y$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

4) Data l'equazione

$$f(x,y) = 2x + y + \mathrm{arctg} y = 0$$

dimostrare che essa permette di definire una sola funzione implicita $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 dotata di asintoti obliqui. Scrivere le equazioni di tali asintoti.

5) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\!\!\int_A \frac{x}{1 + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy$$

essendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

6) Dire se la forma differenziale lineare

$$-\frac{x[\sqrt{x^2+y^2} - 1]}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$$

è esatta nel proprio campo di esistenza ed, eventualmente, calcolarne le primitive.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 13-02-2012

N.B. La prova ha la durata di due ore, nelle quali bisogna risolvere correttamente almeno due esercizi sui tre proposti.

1) Studiare la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = y\sqrt{|y - x^2|} \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

2) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{8y - x^2 - y^2}$$

nell'insieme $X \cap A$ dove X è il campo di esistenza di f ed

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, 6(y-4)^2 - x^2\,y \leq 0\}$$

3) Dimostrare che la successione di funzioni

$$f_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2} \in C^0([0,1]),\, n \in \mathbb{N}$$

non converge ad alcuna funzione $f \in C^0([0,1])$ nella metrica Lagrangiana, mentre converge alla funzione identicamente nulla nella metrica integrale.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 25-06-2012

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & (x,y) \in \mathbb{R}^2, |y| > x^2 \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

studiarne la derivabilità direzionale nell'origine. Dire se esiste il piano tangente al grafico di f nell'origine, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + k^2y^2 \leq 1\}$$

al variare del parametro reale k.

3) Si denoti con $C_b^0(\mathbb{R})$ lo spazio metrico delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$, dotato della metrica Lagrangiana rispetto alla quale è completo. Sia $F : C_b^0(\mathbb{R}) \to C_b^0(\mathbb{R})$ la funzione definita ponendo

$$F(f)(x) = \sin(1 + |f(x)|) \qquad \forall f \in C_b^0(\mathbb{R})\,.$$

Si dica se
(1) F è continua
(2) F ha punti fissi e, in caso di risposta positiva, se esso è unico
(3) (facoltativo) F è una contrazione
giustificando tutte le risposte.

4) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^x e^{-nt^2}\,dt \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R},\;\; n \in \mathbb{N}$$

studiarne la convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ e la uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Giustificare le risposte.
È facoltà del candidato studiare la converge uniforme in $\mathbb{R}$ della successione, giustificando le affermazioni fatte.

5) Calcolare il volume dell'insieme di $\mathbb{R}^3$ seguente

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 3 + 2xz, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3 - 3z^2}}{2}, 0 \leq z \right\}$$

6) Calcolare l'area della parte di grafico della funzione

$$z(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} \, : \, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la cui proiezione sul piano $z = 0$ è l'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y\}.$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 16-07-2012

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

verificare che è continua nell'origine ed ha ivi tutte le derivate direzionali. Provare che le rette tangenti al suo grafico nell'origine non giacciono tutte in uno stesso piano.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = (x+y)|x^2 - y^2| - 3\sqrt[3]{(x+y)|x^2-y^2|}$$

nel suo campo di esistenza.

3) Data la funzione

$$F(x,y) = \sin(x + |y|) - y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce una ed una sola funzione implicita $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua. Tale funzione è dotata di asintoti?

4) Dato il cammino di equazioni parametriche

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2},\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ t \in [-1,1]$$

dimostrare che dalla rappresentazione data si evince che si tratta di una curva regolare. Determinarne la traiettoria e la sua lunghezza.

5) Calcolare il volume del solido delimitato dalle superfici di equazioni

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, z = 1, z = 2 - xy$$

6) Data la forma differenziale lineare

$$\frac{y^2}{x(x+y)}\,dx + \left(\log\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x+y}\right)dy$$

determinarne il campo di esistenza X e, se esistono, scriverne le primitive in X.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 12-09-2012

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{x^3+n^3}\,, \qquad\qquad x \in [0,+\infty[$$

determinarne l'insieme di convergenza puntuale. Studiare, poi, la convergenza uniforme in $[0,1]$ ed in $\mathbb{R}^+$.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = x - y + z$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

3) Data la funzione

$$F(x,y,z) = \int_0^x \frac{e^t-1}{t+1}\,dt + z^2y + e^{z+y} - (y+1)$$

dimostrare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce una ed una sola funzione implicita $z = z(x,y)$ in un intorno del punto $(0,0)$. Dire se esiste il piano tangente al grafico di z nel punto $(0,0,z(0,0))$, giustificando la risposta. Eventualmente, scrivere l'equazione del piano.

4) Dato il cammino di equazioni parametriche

$$x(t) = e^{6t}+2, y(t) = e^{4t},\ \ t \in [-1/2, 1/2]$$

determinarne la sua lunghezza, giustificando il risultato ottenuto.

5) Data la forma differenziale lineare

$$-\frac{y+1}{(x-1)^2+(y+1)^2}\,dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+(y+1)^2}\,dy$$

calcolarne l'integrale lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa nel verso orario.

6) Calcolare l'area della superficie grafico della funzione

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1, |y| \le x\}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 03-10-2012

1) Studiare la convergenza puntuale e totale in $\mathbb{R}_0^+$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$$

al variare del parametro reale positivo α.

2) Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y)=\arccos\sqrt{4x+5-x^2-y^2}-(4x+5-x^2-y^2)$$

nel proprio campo di esistenza, se esistono.

4) Data la forma differenziale lineare

$$\omega =: 2xdx+4ydy$$

sia (α,β) il generico punto della circonferenza C di centro l'origine e raggio 1. Detto $\gamma_{(\alpha,\beta)}$ il segmento congiungente l'origine con (α,β), orientato dall'origine verso (α,β), determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione

$$G(\alpha,\beta)=\int_{\gamma_{(\alpha,\beta)}}\omega$$

al variare di $(\alpha,\beta)\in C$.

5) Calcolare il volume della parte di spazio contenuto nella sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=16$ la cui proiezione ortogonale sul piano $z=0$ dà il cerchio racchiuso nella circonferenza di centro il punto $(2,0)$ e raggio 2.

6) Si consideri il grafico della funzione

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & 0\leq x\leq 1 \\ (2-x)^3 & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

e lo si faccia ruotare attorno all'asse $\vec{x}$. Calcolare l'area della superficie del solido così ottenuto.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 13-12-2012

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

determinarne lo sviluppo in serie di Mac Laurin, precisandone l'intervallo di convergenza.

2) Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\sin(x^2+3y^2)}{x^2+y^2}$$

se esiste.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità in $(0,0)$.

4) Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = 3x + y - z^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

ristretta all'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

5) Dato $t \in]0,1[$ e posto

$$A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, xy \leq t\}$$

calcolare gli estremi inferiore e superiore della funzione

$$\phi(t) = \int_{A_t} (x^2+y^2)\,dx\,dy \ :]0,1[\to \mathbb{R}.$$

6) Data la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{Ax+By}{x^2+y^2}\,dx + \frac{Cx+Dy}{x^2+y^2}\,dy$$

determinare le costanti A, B, C, D in modo che essa sia
(i) chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
(ii) esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, calcolandone anche una primitiva,
se possibile.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 10-02-2014

1) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+3n^4}$$

studiarne la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale in tutto $\mathbb{R}$.

2) Data la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità nell'origine. Per i valori di α per i quali f_α è differenziabile, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,0,0)$.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_D |y|\, x^{-1}\, dxdy$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2x\}$$

4) Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3+x^3}{xy^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova in itinere scritta di Analisi Matematica II
del giorno 10-02-2014

1) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+3n^4}$$

studiarne la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale in tutto $\mathbb{R}$.

2) Data la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali e la differenziabilità nell'origine. Per i valori di α per i quali f_α è differenziabile, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,0,0)$.

3) Determinare i punti di estremi relativo ed assoluto, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) - (x+y)$$

nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 24-02-2014

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \quad y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x} \\ \\ y(0) = 3 \\ \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + (y^2+z^2)^2 - yz$$

3) Data la funzione

$$f_c(x,y) = ye^{x-2y} + cx + 2x^2$$

verificare che l'equazione $f_c(x,y) = 0$ definisce una ed una sola funzione $y_c = y_c(x)$ in un intorno di $x = 0$. Stabilire, poi, per quali valori del parametro c il punto $x = 0$ è punto critico per y_c, studiandone anche la natura.

4) Data la forma differenziale lineare

$$\left[-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{1+(x-y)^2}\right]dx - \left[\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{1+(x-y)^2}\right]dy$$

dire se essa è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed evenualmente calcolarne le primitive.

CdL in Fisica

Prova in itinere scritta di Analisi Matematica II
del giorno 24-02-2014

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x} \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2) Determinare l'insieme E di convergenza della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) x^n.$$

Dire dove si ha convergenza uniforme, giustificando le risposte.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + (y^2 + z^2)^2 - yz$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II (appello riservato)
del giorno 28-04-2014

1) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2 \, : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

e l'insieme

$$A = \{(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

determinare l'insieme $f(A)$, giustificando il procedimento seguito.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = (x - y, x + y) \, : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

provare che essa è iniettiva, suriettiva, di classe C^1 assieme all'inversa. Quindi utilizzare tale f per calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_D e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dx \, dy$$

essendo

$$D = \{(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 1, x > 0, y > 0\}$$

3) Calcolare l'area della superficie totale del solido

$$S = \{(x,y,z), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

4) Risolvere il problema di Cauchy seguente

$$y' = \frac{y^2}{y^2 + 4} \, x \, , \qquad y(0) = 2$$

precisando il più ampio intervallo in cui esse sono definite. Quante soluzioni ammette? Nel caso vi sia un'unica soluzione $y = y(x)$, trovare $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha}$$

esiste finito e non nullo.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 23-06-2014

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|x|} \cos(nx)$$

studiarne la convergenza puntuale, assoluta, uniforma e totale in $\mathbb{R}$. Qualora non vi sia convergenza totale in $\mathbb{R}$ dire se esistono suoi sottoinsiemi limitati dove vi è convergenza totale.

2) Dimostrare che l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, xy > -1\}$$

è aperto e connesso, Quindi provare che

$$\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \qquad\qquad \forall (x, y) \in D$$

3) Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ si consideri la retta (r) passante per $A(2, 0)$ e $B(0, 1)$. Determinare, se esistono, tutti i punti P dell'ellisse tali che il triangolo APB abbia area massima.

4) Calcolare l'integrale triplo

$$\int\!\!\int\!\!\int_D \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 07-07-2014

1) Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente problema

$$\begin{cases} (1+x^2)\,y' - 2\,y = e^{2\,\mathrm{arctg} x} \\ \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \log\frac{x+2}{1-x} \;:\,]-2,1[\to \mathbb{R}$$

scriverne lo sviluppo in serie di Mac Laurin, precisando l'intervallo di convergenza. Dire anche se tale sviluppo è valido agli estremi del suddetto intervallo, giustificando la risposta.

3) Data la curva piana Γ di equazioni

$$x(t) = 1+\sqrt{t}, y(t) = \sqrt{t}\,, \qquad\qquad t \in [0,\pi^2]$$

dire se dalla rappresentazione data si evince la regolarità della curva, altrimenti determinare una parametrizzazione equivalente utile allo scopo. Quindi calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_\Gamma \frac{4x^3-2xy}{x^4+y^2}\,dx + \frac{x^2+2y}{x^4+y^2}\,dy\,.$$

4) Dato l'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 16, x^2+y^2 \le 6z\,\}$$

calcolare l'area della superficie regolare a pezzi che ne è l'intera frontiera.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 08-09-2014

1) Determinare la somma della serie numerica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+3}}{(2n+1)!(2n+3)}$$

2) Data la funzione

$$f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo.

3) Dimostrare che l'equazione

$$xe^y + 2(x-1)y = 0$$

permette di definire un'unica funzione implicita $y = y(x)$ avente per dominio almeno l'insieme $X =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Dire, poi, se tale funzione è continua e/o derivabile in X, giustificando la risposta.

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D |x-1|\,(1-y)\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2y - y^2} \leq x \leq 2 - y\}.$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 22-09-2014

1) Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = \frac{1-y^2}{x}\,, \quad y(1) = 1$$

determinandone tutte le eventuali soluzioni. Per ognuna di esse specificare il più ampio intorno circolare di $x = 1$ in cui è definita.

2) Determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ nei quali la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \frac{x^{n+2}}{(x+4)^n}$$

converge puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{2x}{4x^2+9y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

e la curva γ di equazioni parametriche

$$x(t) = \frac{t^2}{2}\,, \quad y(t) = \frac{t^3}{3}\,, \quad t \in [1,2]$$

calcolare l'integrale $\int_\gamma f\, ds$.

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \, \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$