CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 07-02-2007. C1

1) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + \log a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left[1 + \left(n^\alpha - n^\alpha \cos \frac{1}{n^2} \right) \right]$$

al variare del parametro reale positivo α

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2 - 2\cos x - x \sin x}{x^3 \left[\log(1+x) - x \right]}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|x-2|}}{x+1}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 07-02-2007. C2

1) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 0, a_{n+1} = \sqrt{1 + \log(a_n + 1)} - 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

2) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(n^\alpha - n^\alpha \cos\frac{1}{n^2}\right)$$

al variare del parametro reale positivo α

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2 - 2\cos x - x \sin x}{x^3\left[\log(1+x) - x\right]}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|x-1|}}{x+2}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 07-02-2007. C3

1) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 2, a_{n+1} = \sqrt{1 + \log(a_n - 1)} + 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

2) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(n^\alpha - n^\alpha \cos\frac{1}{n^2}\right)$$

al variare del parametro reale positivo α

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2 - 2\cos x - x\sin x}{x\left[\log(1+x^2) - x^2\right]}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|2x-4|}}{2x-1}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 07-02-2007. C4

1) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \leq 0, a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 + \log(1 - a_n)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

2) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos\left(n^{\alpha} - n^{\alpha} \cos\frac{1}{n^2}\right)}$$

al variare del parametro reale positivo α

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2 - 2\cos x - x \sin x}{x\left[\log(1 + x^2) - x^2\right]}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|2(x-1)|}}{2x+1}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 05-06-2007

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{(3/2)\pi} \frac{3\cos x - 3\cos^3 x - 2^{-1}\sin(2x)}{\sin^3 x + 4\sin^2 x + 5\sin x + 2}\, dx$$

2) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{y}{x} = -x\, y^3$$

definite in un sottointervallo di $]0, +\infty[$.

3) Data la successione di funzioni reali (f_n) definite in $\mathbb{R}$ mediante la legge

$$f_1(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2},\ \ f_{n+1}(x) = \frac{1 + f_n(x)}{1 + n^2}$$

studiarne la convergenza puntuale e quella uniforme.

4) Determinare la funzione somma della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, x^n$$

dopo aver precisato l'intervallo di convergenza.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 05-09-2007

N.B. Per superare la prova scritta occorre svolgere in modo completo e corretto almeno quattro esercizi, due per ogni gruppo.

Gruppo A

1) Determinare gli estremi inferiore e superiore della successione

$$\left(\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\frac{n-1}{n^2+2}\right)$$

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

al variare del parametro reale positivo α.

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-\sin(2x)+2\beta}{x^{\beta}(1-\cos x)}$$

al variare del parametro reale β.

4) Data la funzione

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{|2x-1|}{|x|-1}$$

determinarne campo di esistenza, segno e insieme immagine.

Gruppo B

1) Calcolare l'integrale

$$\int\frac{e^{2x}+e^{4x}}{e^{4x}+3e^{2x}+2}\,dx$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x(1+x)^\alpha}{((1+x)^5 - 1)^\alpha}$$

determinare, se esistono, i valori del parametro reale positivo α per i quali essa risulta sommabile in $]0, +\infty[$.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2x^2\sqrt{y} = 0 \\ \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = x^5 \left(\frac{1}{7!}\, x^2 + \sqrt[5]{1+x} \right)$$

dire se essa è di classe C^∞ in qualche sottointervallo di $\mathbb{R}$ contenente l'origine (giustificando la risposta) e quindi calcolare $f^{(7)}(0)$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 08-10-2007

N.B. Per superare la prova scritta occorre svolgere in modo completo e corretto almeno quattro esercizi, due per ogni gruppo.

Gruppo A

1) Determinare la forma algebrica delle radici quadrate del numero complesso

$$z = 1 + 4\,i\,\sqrt{3}$$

2) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n + 2}{a_n + 3} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

3) Studiare la derivabilità nell'origine delle funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + \sin^n x} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Dire, anche, per quali valori di $n \in \mathbb{N}$, se ne esistono, l'origine è punto di estremo relativo per f_n.

4) Sia $f : [0, +\infty[\; \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

Provare che f è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

Gruppo B

1) Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 2}^{2} \frac{e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^{x}}{e^{4x} - 2e^{3x} - 3e^{2x} + 8e^{x} - 4}\, dx$$

2) Data la funzione

$$f(t) = \frac{(t-1)^{4/3}}{\log t}$$

determinare il campo di esistenza della funzione

$$g(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$$

Quindi determinare eventuali punti di estremo relativo per g.

3) Data l'equazione differenziale seguente

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}\,y' = e^x$$

ed un qualunque intervallo $]a,b[$ contenuto nel dominio di una sua soluzione y^* provare che

(i) y^* non ha punti di massimo relativo in $]a,b[$

(ii) y^* può avere, al più, un solo punto di minimo relativo in $]a,b[$

(iii) un eventuale punto di minimo relativo per y^* in $]a,b[$ deve necessariamente essere di minimo assoluto.

4) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(3x+2)^n}{4^n\sqrt[3]{n}} \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

studiarne la convergenza semplice ed uniforme. Considerata, poi, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ studiarne la convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 13-12-2007

1) Calcolare il limite seguente

$$\left[\frac{n^n + 3^n}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}$$

2) Determinare il carattere della serie numerica seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + \sqrt{n}}{n^2 + x^{2n}}$$

al variare del parametro reale x.

3) Calcolare, se esistono, i limiti seguenti

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{a\,\cos x - b\,e^x + \sin x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{a\,\cos x - b\,e^x + \sin x}{x^2}$$

al variare dei parametri reali a, b.

4) Data la funzione

$$f(x) = [x + \log(x+1)]^{-1}$$

determinare il suo campo di esistenza X, l'insieme $f(X)$. Dire, poi, se essa è iniettiva in X ed, eventualmente, ivi monotòna, giustificando le risposte.

5) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} - \arcsin \frac{x-1}{|x|+1}$$

e disegnarne il grafico.

6) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(\mathrm{arctg} x + 1)}{(1+x^2)(\mathrm{arctg} x + 1)^2}\, dx$$

se esiste.

7) Risolvere l'equazione differenziale lineare

$$y'' + (a-4)\,y' + (a+1)\,y = e^x + \sin x$$

al variare del parametro reale a.

8) Calcolare un valore approssimato di

$$\int_0^{\frac{1}{10}} e^{-x^2}\, dx$$

con errore inferiore a 10^{-10}

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 20-02-2008

1) Provare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

2) Determinare i numeri complessi z soluzione dell'equazione

$$\overline{z}\, z^4 = |z|$$

3) Data la successione definita per ricorrenza seguente

$$a_1 > 0\,, \qquad a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin^2(t^2)\, dt \qquad n \in \mathbb{N}$$

provare che
(i) $0 < a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(ii) $\lim_n a_n = 0$
(iii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

4) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{y \to 0+} \frac{(y \cos y - \sin y)\, \arcsin \sqrt{y^2 + y^3}}{y(1-\cos y)\sqrt{e^{y^2}-1}}$$

se esiste.

5) Studiare la funzione

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$$

e disegnarne il grafico. Vi sono punti in cui la funzione non è derivabile?

6) Calcolare

$$\int \frac{\log(t^4 - t^2 - 2)}{t^3}\, dt$$

7) Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx$$

8) Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!\,(2n+2)}$$

dire quale è il suo insieme di convergenza. Determinare, poi, la funzione somma ϕ della serie scrivendo, e risolvendo, un'equazione differenziale che ammetta tale ϕ come soluzione.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 09-04-2008

1) Trovare le soluzioni non nulle dell'equazione

$$z^4 = (1+i)\,\overline{z}^2$$

2) Studiare la successione definita per ricorrenza seguente

$$a_1 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e determinarne il limite, se esiste.

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{|e^x - 1|}{1+|x|}$$

studiarla e disegnare il grafico.

4) Studiare il segno della funzione

$$g(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\left[\sqrt{x^2-1} - x\right]$$

dopo averne determinato il campo di esistenza.

5) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$$

6) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la funzione

$$g(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^\alpha}$$

risulta sommabile in $]0,1]$?

7) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $]0,1]$ e in $[1,2]$ della successione di funzioni di termine generale

$$f_n(x) = \sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \qquad n \in \mathbb{N}$$

8) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{xy(1+y)}{1+x^2}\,, \qquad y(0) = 1$$

determinando il campo di esistenza delle soluzioni.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 12-02-2009. C1

1) Provare che
$$|\sin(nx)| \leq n\,|\sin x| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$

2) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie numerica seguente converge
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right] x^n \,.$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha convergenza assoluta? Vi sono valori del parametro x per i quali la serie è indeterminata?

3) Calcolare il limite seguente
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x}}{2^{x^\alpha}-1}$$

al variare del parametro reale positivo α.

4) Data la funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge seguente
$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \beta\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sinh(x+1)} & x \in]-\infty,-1[\\ \alpha\frac{\log x^2}{x-1} & x \in\ [-1,1[\\ \log\left(x^2+\sqrt{x-1}\right) & x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

si determinino le coppie $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ per le quali essa risulta continua in entrambi i punti $x=-1$, $x=1$. Per le rimanenti coppie si dica quale tipo di discontinuità la $f_{\alpha,\beta}$ ha nei punti suddetti.

5) Date le funzioni continue seguenti
$$f(x) = \sin x\,\sqrt[3]{x^2+x}\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \ g(x) = \log x\,\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ : [1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$$

dire in quali punti dei rispettivi domini occorre utilizzare la definizione per calcolarne la derivata, giustificando la risposta; quindi classificare i punti suddetti.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 12-02-2009. C2

1) Provare che

$$|\cos(nx)| \leq |\cos x| + (n-1)\,|\sin x| \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$

2) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie numerica seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos\frac{1}{n}\right] x^n\,.$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha convergenza assoluta? Vi sono valori del parametro x per i quali la serie è indeterminata?

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \operatorname{arcsin}\sqrt{x^2+x}}{(1+x^\alpha)^\pi - 1}$$

al variare del parametro reale positivo α.

4) Data la funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge seguente

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \beta\frac{\sqrt{|x+1|}}{\operatorname{arctg}(x+1)} & x \in]-\infty,-1[\\ \alpha\frac{\sinh(x^2-1)}{x-1} & x \in\ [-1,1[\\ \operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x-1}\right) - \frac{\pi}{4} & x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

si determinino le coppie $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ per le quali essa risulta continua in entrambi i punti $x=-1$, $x=1$. Per le rimanenti coppie si dica quale tipo di discontinuità la $f_{\alpha,\beta}$ ha nei punti suddetti.

5) Date le funzioni continue seguenti

$$f(x) = \sinh x\,\sqrt[3]{x^2+x} \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \ g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \ : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$$

dire in quali punti dei rispettivi domini occorre utilizzare la definizione per calcolarne la derivata, giustificando la risposta; quindi classificare i punti suddetti.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 13-06-2009

1) Determinare il campo di esistenza ed il segno di ognuna delle funzioni

$$f_h(x) = h\ \arcsin\sqrt{5-x} + \arcsin(2x-9) - \frac{\pi}{2}$$

al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$

2) Data la funzione definita dalla legge seguente

$$f(t) = \frac{1-\sin^2 t - \cos(2t)}{\sin t\,\sqrt{2+\cos t}}$$

dire se essa è sommabile nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, giustificando la risposta. Nel caso di risposta positiva, calcolare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$$

3) Dire se esiste un intorno del punto $x = 0$ in cui il seguente Problema di Cauchy

$$y' = 4x\,\sqrt{y-1}\,, \qquad y(0) = 1$$

ha una sola soluzione. Giustificare la risposta.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 18-06-2009

N.B. Coloro che devono sostenere la seconda prova in itinere sono tenuti ad affrontare solo lo studio degli esercizi della parte B e devono consegnare entro due ore e mezza dall'inizio della prova. Gli altri candidati hanno a disposizione tre ore e mezza e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi, dei quali almeno uno della parte A ed uno della parte B.

PARTE A

1) Dati i numeri reali $a_1, a_2, \ldots a_n$, $n \in \mathbb{N}$, si ponga $\Pi_{k=1}^{n} a_k = a_1\, a_2 \ldots a_n$. Si provi quindi che

$$\Pi_{k=1}^{n}\left(k+3+\frac{2}{k}\right)=\frac{n+1}{2}\,(n+2)! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) Data la successione definita per ricorrenza ponendo

$$x_0 \in]0,+\infty[\,, \qquad x_{n+1}=\frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

si studi il segno e la monotonìa della stessa, calcolandone poi il limite.

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left[t+t^3\right]-\sin t}{\sin t-\mathrm{tg} t}$$

PARTE B

4) Sia data la funzione

$$f(x)=\frac{x\,\log x}{(1+x^2)^2} :]0,+\infty[\; \to \mathbb{R}$$

Il candidato scelga di affrontare almeno uno dei seguenti quesiti

(4.1) dire se f è sommabile in $]0,1]$, calcolando anche $\int_0^1 f(x)\,dx$

(4.2) dire se f è sommabile in $[1,+\infty[$, calcolando anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

5) Data l'equazione differenziale lineare

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}$$

si cerchino, se esistono, le sue soluzioni $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$y(0) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$$

6) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n} \right) \; : \; [0, +\infty[\; \to \mathbb{R}$$

si dimostri che converge puntualmente in $[0, +\infty[$, calcolandone la funzione limite. Quindi si studi la convergenza uniforme nello stesso insieme.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 13-07-2009

N.B. Coloro che devono sostenere la seconda prova in itinere sono tenuti ad affrontare solo lo studio degli esercizi della parte B e devono consegnare entro due ore e mezza dall'inizio della prova. Gli altri candidati hanno a disposizione tre ore e mezza e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi, dei quali almeno uno della parte A ed uno della parte B.

PARTE A

1) Calcolare le radici quarte del seguente numero complesso

$$\frac{(-2+2\sqrt{3}\,i)^5\,(1+3i)^4}{(\sqrt{2}+i)^8}$$

2) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - \mathrm{tg}^2 x}{x\left[2^{\sqrt[4]{1+x^3}-1}-1\right]}$$

3) Studiare il carattere della serie seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\,\arcsin^{\alpha}\frac{1}{n}$$

al variare del parametro reale positivo α.

PARTE B

4) Data la funzione

$$f(x)=\sqrt{|x^2-3x+2|}\;:\;\mathbb{R}\;\to\mathbb{R}$$

disegnarne il grafico, specificando se

(4.1) vi sono punti del suo dominio in cui f è non derivabile ed, eventualmente, classificando tali punti

(4.2) il suo grafico è simmetrico rispetto a qualche retta parallela all'asse $\vec{y}$

5) Calcolare l'integrale seguente

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x \, \sin x}{\sin^4 x + \sin^2 x + 1} \, dx$$

6) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\sin^2 x + \frac{1}{n} \right)^n$$

se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Nel caso in cui non vi sia convergenza uniforme nel suddetto intervallo, si determini almeno un suo sottointervallo in cui vi è convergenza uniforme.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 14-09-2009

N.B. Coloro che devono sostenere la seconda prova in itinere sono tenuti ad affrontare solo lo studio degli esercizi della parte B e devono consegnare entro due ore e mezza dall'inizio della prova. Gli altri candidati hanno a disposizione tre ore e mezza e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi, dei quali almeno uno della parte A ed uno della parte B.

PARTE A

1) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\overline{z}\, z^4 = 1 + i$$

2) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione

$$f_n(x) = e^x + nx - 2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e si dimostri che essa ha un unico zero $x_n \in \mathbb{R}$. Si provi, poi, che $x_n \in [0, 1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi che $lim_n x_n = 0$. Si calcoli infine il limite seguente

$$\lim_n n(1 - nx_n)$$

3) Studiare il carattere della serie seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na^{n+1} - na^n - a^n - 1}{(a^n + 1)(a^{n+1} + 1)}$$

al variare del parametro reale positivo a. Per i valori di a per cui la serie converge, se ne calcoli la somma.

PARTE B

4) Data la funzione

$$f(x) = 2\,\frac{|x|}{x}\,\sqrt[4]{\frac{\cosh(\log x^4) - 1}{8}}$$

disegnarne il grafico

5) Calcolare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = x\,\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

nel suo campo di esistenza.

6) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}\,:\;[0,2] \to \mathbb{R}$$

si calcoli il

$$\lim_n \int_0^2 f_n(x)\,dx$$

giustificando il risultato ottenuto.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 30-09-2009

N.B. I candidati hanno a disposizione tre ore e mezza e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi.

1) Dire per quali numeri reali $x \in [0, +\infty[$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 x + 2}{n^2 + x} \right)^{\ln n} x^n$$

2) Trovare, se ne esistono, i valori del parametro reale non nullo α per i quali il limite seguente

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\alpha\, x) - \ln(1 + \alpha\, x) + x}{\operatorname{arctg}(\alpha\, x)}$$

esiste finito e non nullo.

3) Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$x \geq 1 + \sqrt{1 + 2 \ln(x - 1)}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = e^{-|x|} \, \frac{x}{|x + 1|}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

5) Calcolare in $[0, \pi]$ le primitive della funzione

$$g(x) = \frac{\sin x \sqrt{4 - 4 \sin^2 x}}{\sin^2 x + 2 \sin x + 2}$$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2 + y^2}{x^2}\,, \qquad y(1) = 1$$

precisando il campo di esistenza della soluzione.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 05-12-2009

N.B. I candidati hanno a disposizione tre ore e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome **A STAMPATELLO** su ognuno dei fogli che saranno consegnati.

1) Dimostrare che il numero $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n} - 1}$$

3) Dire per quali numeri reali x converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1 \right) x^{2n}$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}\, e^{-\frac{2}{x}}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

5) Calcolare

$$\int_2^3 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,, \qquad y(1) = 1$$

precisando il campo di esistenza della soluzione.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 21-12-2009

N.B. I candidati hanno a disposizione 45 minuti e dovranno svolgere correttamente un solo esercizio. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome **A STAMPATELLO** su ognuno dei fogli che saranno consegnati.

1) Studiare la funzione seguente

$$f(x) = e^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$$

e disegnarne il grafico.

2) Calcolare l'integrale seguente

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin x \log(2 - \sin x)}{\cos^2 x} \, dx$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 11-02-2010

N.B. I candidati hanno a disposizione tre ore e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome **A STAMPATELLO** su ognuno dei fogli che saranno consegnati.

1) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1-\cos^3 x)(x^2+\mathrm{arctg}^2 x\cos^2 x)}{(x^2-2\arcsin x+2\sin x)\arcsin x\sin x}$$

2) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}\right]$$

al variare del parametro reale α.

3) Data la funzione

$$f(x) = \arccos\frac{2x}{x^2+1}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

4) Calcolare

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x(2+\cos^2 x)}{\sin^4 x}\,dx$$

5) Risolvere l'equazione differenziale seguente

$$y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x^2 y}$$

trovando le soluzioni il cui insieme di definizione sia contenuto in $]0,+\infty[$. Precisare, per ogni siffatta soluzione, l'insieme di definizione.

6) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{nx}$$

studiarne la convergenza puntuale ed uniforme in $]0,1]$ e $[1,2]$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 25-03-2010

N.B. I candidati hanno a disposizione tre ore e dovranno svolgere correttamente non meno di tre esercizi.
Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome **A STAMPATELLO** su ognuno dei fogli che saranno consegnati.

1) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left[\cos \frac{1}{n^\beta}\right]}{\sin^2\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^\pi - 1\right]}$$

al variare dei parametri reali positivi α, β.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}}$$

e disegnarne il grafico.

3) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}}$$

dire se è invertibile nell'insieme $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ed in caso di risposta positiva determinare la funzione inversa, precisandone il dominio.

4) Studiare la successione definita per ricorrenza seguente

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \\ a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} & \qquad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

5) Risolvere la disuguaglianza

$$\text{arctg}x - \text{arctg}\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{\pi}{4}$$

6) Calcolare

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I del giorno 18-02-2011. C1

1) Dire se il numero $\log_{48} 72$ è razionale oppure no, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2 + 1 & \text{n} \quad \text{pari} \\ \\ 3n^2 + 1 & \text{n} \quad \text{dispari} \end{cases} \quad : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

dire se essa è iniettiva e/o suriettiva, giustificando le risposte.

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n \frac{1 - \cos\left[\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right]}{\log\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}\right)}$$

4) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{(1-x^n)^2}\right]$$

al variare del parametro reale $x > -1, x \neq 1$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 18-02-2011. C2

1) Dire se il numero $\log_{100}80$ è razionale oppure no, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(n) = \begin{cases} 2n^2 - 1 & \text{n} \quad \text{pari} \\ \\ n^2 + 1 & \text{n} \quad \text{dispari} \end{cases} \quad : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

dire se essa è iniettiva e/o suriettiva, giustificando le risposte.

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}\right)}{\log\left(\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} - 1\right)}$$

4) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{1 - x^{2n}}\right]$$

al variare del parametro reale $x > -1, x \neq 1$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 18-02-2011. C3

1) Dire se il numero $\log_{300} 90$ è razionale oppure no, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(n) = \begin{cases} 2n^2 + 1 & \text{n} \quad \text{pari} \\ \\ n^2 + 3 & \text{n} \quad \text{dispari} \end{cases} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

dire se essa è iniettiva e/o suriettiva, giustificando le risposte.

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n \frac{\log\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}\right)}{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right)}$$

4) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{(1-x)^{2n}}\right]$$

al variare del parametro reale $x > -1, x \neq 1$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 18-02-2011. C4

1) Dire se il numero $\log_{720}30$ è razionale oppure no, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(n) = \begin{cases} n^2+2 & \text{n} \quad \text{pari} \\ \\ n^2+n+1 & \text{n} \quad \text{dispari} \end{cases} \; : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

dire se essa è iniettiva e/o suriettiva, giustificando le risposte.

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n \frac{\sinh\left(n^2 - \sqrt{n^4-1}\right)}{\log \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}$$

4) Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{(1-x^2)^n} \right]$$

al variare del parametro reale $x > 0, x \neq 1$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 20-06-2011.

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h^2 \cos^2 x + \sin x}{1+\cos^2 x} \cos x & x \leq 0 \\ h + \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+2} & x > 0 \end{cases}$$

determinare tutti i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali essa è dotata di primitive, giustificando la risposta. In questo caso calcolare le primitive.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = |x| \arcsin \frac{x^2 - 1}{x|x|}$$

e disegnarne il grafico.

3) Calcolare il limite, se esiste, della successione (a_n) definita ponendo

$$a_n = \int_0^1 x^n \, e^x \, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y \sin x = \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 27-06-2011.

1) Calcolare, se esistono, i limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2(x+5)}\,\sin x}{[3^{x^2}-1]\log\left(\frac{x^2+3x^3}{x^2}\right)} \quad , \qquad \lim_n \left(\frac{3n^2+5n-6}{3n^2+7n+1}\right)^{n\log n^2} \sin(n^2+n)$$

2) Assegnata la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{\log|x|+1}{|x-1|}}}$$

determinarne il campo di esistenza e gli eventuali asintoti. Dire dove f è derivabile, studiarne la monotonìa e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti. Senza calcolare la derivata seconda, dire quale è il numero minimo di flessi presenti nel grafico di f.

3) Assegnata la funzione

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \left[\frac{e^{at}(2t-3)}{2\sqrt{t-1}} - \frac{a^2-1}{t}\right] dt$$

determinarne il campo di esistenza e gli eventuali asintoti al variare del parametro reale a.

4) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 2y' + 6y = e^{-x}$$

5) Studiare, al variare del parametro reale $x > 0$ la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \log(5^n) + x^n}{7^n + 3n}$$

6) Assegnata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, derivabilità e differenziabilità nel punto $(1,0)$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 18-07-2011.

1) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - cosx - \frac{3}{2}x}{log(1 + x\,\mathrm{arctg}x) + 1 - e^{x^2}}$$

2) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x\log|x| - \frac{x}{\log|x|} - 2x$$

3) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z|^2 + i\,\overline{z}^2 = -2i$$

4) Assegnata l'equazione differenziale

$$y'' - h^2\,y = xe^x \quad \text{dove} \quad h \geq 0$$

trovare le soluzioni dotate di asintoto orizzontale sinistro.

5) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \, \frac{n}{(5^n - 4^n)\,\log n} \right]$$

6) Trovare le primitive in $]0, \frac{\pi}{2}[$ della funzione

$$f(x) = \frac{3 - 4\sin^2 x}{(2\cos x - 1)\sin x}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 05-09-2011

1) Disegnare nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$\frac{z+i}{z-1} \in \mathbb{R}\,.$$

2) Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^\alpha}^{2\,n^\alpha} \frac{dt}{t^4+1}$$

al variare del parametro reale $\alpha < 0$

3) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to+\infty} \log x \left[\arccos\frac{1}{x} - \mathrm{arctg} x\right].$$

4) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}}$$

disegnarne il grafico, classificandone gli eventuali punti di non derivabilità.

5) Dire se esistono le primitive della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\log x - \cos x & x \in]0,+\infty[\\ \frac{\sqrt{\cos^2 x(\sin x+1)}}{2\sin x-1} & x \in [-\pi,0] \end{cases}$$

e, in caso affermativo, calcolarle.

6) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2|xy|(x^3-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità e la differenziabilità nell'origine.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 26-09-2011

1) Dati i due insiemi seguenti

$$X = \left\{ \frac{n}{n^2+64} : n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad Y_\lambda = \left\{ \frac{\lambda}{2(1+x^2)} + (\lambda + |\lambda|) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

determinare i valori del parametro reale λ per i quali essi sono separati e quelli per i quali essi sono anche contigui, se ne esistono.

2) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4 \times 7 \times 10 \times \ ... \ \times \ (3n+1)}{(2n-1)!!}}$$

3) Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}$$

e, nel caso converga, anche la sua somma.

4) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x\,|\log x|}$$

dimostrare che essa è prolungabile per continuità nell'origine e disegnare il grafico del prolungamento.

5) Dire per quali valori del parametro reale α esistono primitive della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x^2}{\sqrt{1-\cos x^2}} + \alpha \frac{\sin x}{x} & x \in]0,1] \\ \sqrt{x^2+\alpha^2}\, \log(2-x) & x \in [-1,0] \end{cases}$$

e calcolarle.

6) Data la funzione

$$f(x,y) = y^2 \sqrt[3]{x^2(1-y)y^2}$$

studiare la derivabilità direzionale di f e la sua differenziabilità nel punto $(0,1)$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 12-12-2011

1) Dato l'insieme numerico

$$X = \left\{ \frac{m}{n} + 4\frac{n}{m} \,:\, n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \leq \sqrt{17}n \right\}$$

determinarne l'inf e il sup, precisando se si tratta di min e/o max.

2) Studiare la successione definita per ricorrenza seguente

$$a_1 = \frac{3}{2}\,,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

determinandone il limite. Nel caso in cui essa converga, detto $L \in \mathbb{R}$ tale limite, determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |L - a_n|$$

3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica, con periodo $T > 0$. Provare che esiste $x_0 \in [0, T]$ tale che

$$f(x_0 + T/2) = f(x_0)$$

4) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^4 + x|} - x^2$$

studiarla e disegnarne il grafico.

5) Provare che per $x > -1, x \neq 0$ si ha

$$(1 + x)^{\alpha} < 1 + \alpha x \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 1$$

6) Calcolare l'integrale seguente

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}\, dx$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 30-01-2012

1) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione seguente

$$z^3\,|z|^2 + |z|^3 = z^3 + |z|^5$$

2) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n n \sin\left(\frac{n^2(n+3)+2}{n}\,\pi\right)$$

3) Determinare il carattere della serie seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

4) Determinare i numeri reali $x \in]-\infty, 1[$ per i quali è soddisfatta la disuguaglianza

$$(1-x)\,e^{\frac{x}{\sqrt{1-x}}} \geq 1$$

5)Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{3-4\sin^2 x}{(2\cos x - 1)\sin x}\,dx$$

6) Risolvere il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = e^x \\ \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 11-04-2012

1) Disegnare nel piano di Argand-Gauss l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} Im\left(\frac{z+1}{z-i}\right) \leq 0 \\ \\ |z-1-i| \leq 1 \end{cases}$$

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{2}{3}} \left[\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\right]$$

al variare del parametro reale positivo α.

3) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos(x^2)) + x^4}{x^8}$$

4) Assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - x|}}{x-2}$$

studiarla, precisando se vi sono punti di non derivabilità, e disegnarne il grafico.

5) Assegnata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x} & x \neq 0 \\ \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

a) determinare l'insieme X dei punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale $\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$ è un numero reale

b) determinare l'insieme dei punti di derivabilità della funzione

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt : X \to \mathbb{R}$$

6) Risolvere il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova in itinere scritta di Analisi Matematica I
del giorno 25-02-2013.

N.B. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome, numero di matricola, A STAMPATELLO su ognuno dei fogli che il candidato consegnerà. Non è ammesso scrivere a matita o con la penna rossa. I candidati hanno a disposizione due ore.

1) Data la funzione

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

provare che l'insieme immagine $f(\mathbb{R})$ è $[1, +\infty[$. Dire, poi, se f è iniettiva, giustificando la risposta. In caso di risposta negativa, studiare la iniettività di $f_{|\mathbb{R}_0^+}$.

2) Calcolare

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} + \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

3) Studiare, al variare del parametro reale x, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, x^{n^2}}{(2n)!}$$

giustificando i risultati ottenuti.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DELLA PROVA IN ITINERE DEL GIORNO 25-02-2013

1) Data la funzione

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

provare che l'insieme immagine $f(\mathbb{R})$ è $[1, +\infty[$. Dire, poi, se f è iniettiva, giustificando la risposta. In caso di risposta negativa, studiare la iniettività di $f_{|\mathbb{R}_0^+}$.

Innanzitutto osserviamo che

$$f(x) = x^2(x+1)^2 + 1 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

e quindi che l'insieme immagine $f(\mathbb{R})$ è un sottoinsieme dell'intervallo $[1, +\infty[$. Per provare che i due insiemi coincidono dimostriamo che l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x \in \mathbb{R}$ per ogni $y \in [1, +\infty[$. Occorre quindi risolvere l'equazione seguente

$$x^2(x+1)^2 + 1 = y \iff x^2(x+1)^2 = y - 1 \iff |x(x+1)| = \sqrt{y-1}$$

Poiché è facile vedere che almeno l'equazione $x(x+1) = \sqrt{y-1}$ ha soluzione, possiamo concludere che $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$. Dalla (1) si deduce anche che $f(0) = f(-1)$ e quindi che f non è iniettiva in $\mathbb{R}$. Infine studiamo la iniettività di f se ristretta a $\mathbb{R}_0^+$. Supponiamo che x_1, x_2 siano due numeri reali non negativi tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Questa uguaglianza, grazie alla (1), può essere scritta come segue

$$x_1^2(x_1+1)^2 = x_2^2(x_2+1)^2 \tag{2}$$

Dal momento che $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ deduciamo dalla (2) che

$$x_1(x_1+1) = x_2(x_2+1) \iff (x_1^2 - x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0 \iff$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0 \iff x_1 - x_2 = 0$$

Ne viene allora che f è iniettiva, se ristretta a $\mathbb{R}_0^+$.

2) Calcolare

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} + \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

Per calcolare il limite è sufficiente scrivere

$$\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} + \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}}{\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}} + \frac{1-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n^2}}} \tag{3}$$

dove l'uguaglianza è stata ottenuta dividendo numeratore e denominatore per $\frac{1}{n^2}$. Utilizzando i limiti notevoli seguenti

$$x_n \to 0 \Longrightarrow \lim_n \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \lim_n \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \lim_n \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_n \frac{(1-x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

nonché noti risultati sulle operazioni con i limiti, deduciamo, dalla (3), che il limite richiesto vale -2.

3) Studiare, al variare del parametro reale x, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, x^{n^2}}{(2n)!}$$

giustificando i risultati ottenuti.

Innanzitutto osserviamo che la serie converge se $x = 0$. Se supponiamo che $x \in \mathbb{R}^+$, visto che abbiamo allora una serie a termini positivi, possiamo utilizzare il Corollario del Criterio del Rapporto per studiare la serie data. Otteniamo

$$\lim_n \frac{\frac{3^{n+1}\, x^{(n+1)^2}}{(2n+2)!}}{\frac{3^n\, x^{n^2}}{(2n)!}} = \lim_n \frac{3\, x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} = \begin{cases} 0 & 0 < x \le 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

grazie a noti limiti notevoli. Se ne deduce che la serie converge per $0 < x \le 1$, mentre diverge per $x > 1$. Studiamo, infine, il caso $x < 0$ ed iniziamo osservando che la serie in esame converge assolutamente (e quindi converge) se $-1 \le x < 0$; considerando, infatti, la serie dei valori assoluti, è possibile applicare ad essa quando già trovato nel caso $x > 0$. Rimane da studiare il caso $x < -1$. Il termine generale della serie può essere scritto come segue

$$\frac{3^n\, x^{n^2}}{(2n)!} = (-1)^n \frac{3^n\, |x|^{n^2}}{(2n)!}$$

dal momento che $x = -|x|$ se $x < 0$. Inoltre, si ha

$$\lim_n \frac{3^n\, |x|^{n^2}}{(2n)!} = +\infty$$

grazie a un noto limite notevole. Infine, osserviamo che

$$\frac{3^{n+1}\, |x|^{(n+1)^2}}{(2n+2)!} \ge \frac{3^n\, |x|^{n^2}}{(2n)!} \Longleftrightarrow \frac{3\, |x|^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \ge 1 \tag{4}$$

Poiché

$$\lim_n \frac{3\, |x|^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} = +\infty$$

(limite notevole) applicando il Teorema della Permanenza del Segno Generalizzato possiamo concludere che l'ultima disuguaglianza della (4) è definitivamente vera. Per uno dei Teoremi relativi allo studio delle serie a termini di segno alterno, concludiamo che la serie è indeterminata.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 24-06-2013.

N.B. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome, numero di matricola, A STAMPATELLO su ognuno dei fogli che il candidato consegnerà. Non è ammesso scrivere a matita o con la penna rossa. I candidati hanno a disposizione tre ore.

Gruppo A

1) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore, al variare del parametro reale positivo k, del seguente insieme numerico

$$\left\{ \left(3n - \frac{1}{n}\right)^{n\,k\,\log k}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) Studiare

$$\lim_n \frac{1 - \cos\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\sin\frac{1}{n}\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

3) Studiare, al vatiare del parametro reale k, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{n^2}{n^4+1}\right)}{n^{3k+1}}.$$

Gruppo B

1) Data la funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x\,|\log x|}}$$

determinarne il campo di esistenza X e dire in quali punti di $\overline{X}$ essa è prolungabile per continuità. Studiare la derivabilità, la monotonìa e determinare gli eventuali estremi relativi della funzione prolungamento.

2) Calcolare

$$\int \frac{\log x + \sqrt{2\log x - 1}}{x\,(\log x - \sqrt{2\log x - 1})}\,dx$$

3) Dire per quali $x \in]0, +\infty[$ vale la seguente disuguaglianza

$$(2\sqrt{x} - 1) \log x \geq 2\sqrt{x} - 2 \, .$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 08-07-2013.

N.B. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome, numero di matricola, A STAMPATELLO su ognuno dei fogli che il candidato consegnerà. Non è ammesso scrivere a matita o con la penna rossa. I candidati hanno a disposizione due ore.

Gruppo A

1) Calcolare

$$\lim_{n} \frac{\log\left(\sqrt[n]{n} + 1 - \cos\frac{1}{n}\right)^n}{\log n}.$$

2) Studiare, al variare del parametro reale positivo α, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Gruppo B

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}$$

e disegnarne il grafico. Non è richiesta la determinazione delle soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$, ma occorre provare che tale equazione ha soluzione unica x_0 nel campo di esistenza della funzione e che $x_0 \in]0,1[$.

2) Calcolare

$$\int \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^2}\,dx$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 09-09-2013

N.B. Si raccomanda di scrivere il proprio nome e cognome, numero di matricola, A STAMPATELLO su ognuno dei fogli che il candidato consegnerà. Non è ammesso scrivere a matita o con la penna rossa. I candidati hanno a disposizione due ore.

1) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\log\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) - 3\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x+1|}{e^{|x|}}$$

e disegnarne il grafico.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x\log(1+x^4)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

4) Determinare i valori del parametro reale $\alpha, \alpha \neq 0$, per i quali la funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{arctg}\left(x^{\frac{2}{\alpha}}\right)}{\sin\sqrt{x} + x}$$

è sommabile in $]0,1]$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica I
del giorno 23-09-2013

1) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + 3 \sin \frac{1}{n} - e^{\frac{3}{n}}\right]$$

2) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{(x \sin x)^{\alpha}}$$

al variare del parametro reale positivo α

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + x}}{1 + \sqrt{1 + x}}$$

determinarne l'insieme immagine ed il grafico. Nel caso in cui f risulti invertibile determinare anche la legge di definizione della funzione inversa.

4) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + 1}$$