UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Esercizi di **Analisi Matematica II** mai assegnati.

Gli esercizi proposti servono solo a far capire agli studenti il livello del compito scritto. La struttura della prova d'esame verrà comunicata durante il corso.

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{1/5} \log(1+x^4)\,dx$$

con errore inferiore a 10^{-2}.

Esercizio 2. Dire se la legge

$$f(x,y) = |\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y|$$

definisce una metrica su $\mathbb{R}$. In caso affermativo dire se lo spazio metrico ottenuto è completo.

Esercizio 3. Dire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \log(x^2+y^2) & \text{se } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

è differenziabile nel suo campo di esistenza.

Esercizio 4. Dire se l'equazione $2x + y + \operatorname{arctang} y = 0$ definisce la variabile y in funzione di x in un intorno di $(0,0)$. Tracciare un grafico delle eventuali funzioni implicite.

Esercizio 5. Determinare gli eventuali estremi relativi e gli estremi assoluti della funzione

$$e^{-(x+y)|y-x^2|}$$

nel suo campo di esistenza.

Esercizio 6. Calcolare il potenziale $\mathcal{U}$ della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{2x^3 - x^2 - 2xy - y}{(x^2-y)^2}\,dx + \frac{-x^2+x+y}{(x^2-y)^2}\,dy$$

tale che $\mathcal{U}(1,0) = 0$.

Esercizio 7. Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando il grafico della funzione $\varphi(x) = \sqrt{xe^{-x^2}}$ attorno all'asse $\vec{x}$.

Esercizio 8. Dire se l'equazione

$$x^2 + y^2 - \int_0^x e^{-t^2} \operatorname{sen}(xt)\, dt + \operatorname{sen}(yz) + x = 0$$

definisce una superficie regolare in un opportuno intorno del punto $P_0 = (0, 0, 0)$. In caso affermativo, scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto P_0.

Esercizio 9. Dire per quali valori reali del parametro λ il problema

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y + x^2} - 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \lambda \end{cases}$$

ammette soluzione. Determinare poi tutte le soluzioni ottenute per ciascuno dei valori di λ trovati.

Esercizio 10. Determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -6y_1 + y_2 - 8y_3 \\ y_2' = \quad 2y_1 + 4y_3 \\ y_3' = \quad 4y_1 - y_2 + 6y_3 \end{cases}$$

e discutere la stabilità della soluzione identicamente nulla per $x \to +\infty$.

Esercizio 11. Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log^2 \left(\frac{n+1}{n} \right) (x-2)^n$$

Esercizio 12. Verificare che la legge

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

definisce una metrica su $C^0([0, 1])$. Dire se il sottoinsieme

$$X = \{f \in C^0([0, 1]) \ : \ f(0) = 0\}$$

è chiuso nella metrica d.

Esercizio 13. Dire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3 y)}{x^2 + y^2} & \text{se } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

è differenziabile nel suo campo di esistenza.

Esercizio 14. Dire se le condizioni

$$\begin{cases} e^{y^2} + y - x^3 + z = 2 \\ x^2 + \int_0^y e^{-zt^2}\, dt = 1 \end{cases}$$

definiscono la variabile y in funzione di x e z in un intorno di $(1, 0, 2)$. In caso affermativo calcolare il gradiente delle funzioni così ottenute.

Esercizio 15. Determinare gli eventuali estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = x(x^2 + y^2 + z^2)e^{-x(x^2+y^2+z^2)}$$

nel semispazio $H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0\big\}$.

Esercizio 16. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{5x^2 + 3y^4}{(x^2 + y^4)^{2/3}}\, dx + \frac{4xy^3}{(x^2 + y^4)^{2/3}}\, dy$$

lungo l'arco di circonferenza centrato nell'origine congiungente i punti $P_1(-1, -1)$ e $P_2(1, 1)$ nel verso antiorario delle rotazioni.

Esercizio 17. Studiare la sommabilità della funzione $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{|4x^2 + y^2 - 1|}}$ nel dominio $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 \leq 2\big\}$ e calcolare $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dxdy$.

Esercizio 18. Calcolare l'area della regione piana T campo di esistenza della funzione definita dalla legge $\log(|y| - x^2 + 1)$.

Esercizio 19. Dire se il problema

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right) dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ammette soluzione. In caso affermativo ricavarne un'espressione in forma implicita. Tracciare poi un grafico qualitativo delle soluzioni in un intorno del punto $(1, 1)$.

Esercizio 20. Determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 3y_2 \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 - y_3 \end{cases}$$

e discutere la stabilità della soluzione identicamente nulla per $x \to +\infty$.

Esercizio 21. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n \frac{1}{\log(3n^2+2)}$$

Esercizio 22. Verificare che la legge

$$d(f,g) = \max_{[0,1]} |f'(x) - g'(x)| + |f(1) - g(1)|$$

definisce una metrica su $C^1([0,1])$. Dire se lo spazio metrico così ottenuto è completo.

Esercizio 23. Dire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile nel suo campo di esistenza.

Esercizio 24. Dire se l'equazione $(xy - z\log y + e^{xz} - 1)^2 = 0$ permette di definire una funzione del tipo $x = \psi(y,z)$ in un intorno del punto $(0,1,1)$. In caso affermativo calcolare il gradiente delle eventuali funzioni così ottenute.

Esercizio 25. Determinare gli eventuali estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

nell'insieme $X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y^2 \leq x \leq 1\big\}$.

Esercizio 26. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{4x^5 + 2xy^2}{\sqrt{x^4+y^2}}\, dx + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^2}}\, dy$$

lungo la curva di equazione cartesiana $x^4 + y^2 = 1$ orientata nel verso positivo.

Esercizio 27. Dire se l'insieme

$$E = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 2z^2 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^3$ e calcolarne il volume.

Esercizio 28. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_S x d\sigma$ dove

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x \geq 0\right\}.$$

Esercizio 29. Dire se il problema

$$\begin{cases} y' - |y| = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione. In caso affermativo ricavarne un'espressione esplicita e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 30. Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -6y_1 - 2y_2 + 2y_3 + x \\ y_2' = 6y_1 - 4y_3 - 1 \\ y_3' = -4y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 2x \end{cases}$$

Esercizio 31. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 + \cdots + a_n) x^{3n}$$

Esercizio 32. Sia X l'insieme delle funzioni $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Posto

$$\mathcal{N}(\varphi) = \sup_{t \in [0,1]} \|\varphi'(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

dire se $(X, \mathcal{N})$ è uno spazio vettoriale normato. In caso affermativo dire se è completo.

Esercizio 33. Dire se la funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = \operatorname{arcsen} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

è differenziabile all'interno del suo campo di esistenza.

Esercizio 34. Nel piano cartesiano sono date le rette $x = 0$, $y = 0$ e $x + 2y = 16$. Determinare, se esiste, il punto del piano che rende minima la somma dei quadrati delle distanze dalle tre rette.

Esercizio 35. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione definita dalla legge

$$f(x, y) = e^{-(y-x^2)} + (y + x^2)^3$$

nell'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\right\}$$

Esercizio 36. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{y\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx - \frac{x^3}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy$$

lungo la curva di equazioni parametriche $\gamma(t) = (\cos t, 2 + \operatorname{sen} t)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Esercizio 37. Dire se la funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è sommabile nell'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1,\ x \geq 0\,,\ y > 0\right\}$$

ed eventualmente calcolare l'integrale

$$\int_E f(x, y)\, dxdy.$$

Esercizio 38. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_S \frac{1}{x^2 + y^2} d\sigma$ esteso alla superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \leq z \leq h\right\}$$

dove R e h sono due costanti positive.

Esercizio 39. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 40. Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 4y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 2y_2 - 8y_3 \\ y_3' = 3y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

Esercizio 41. Determinare tutti gli intervalli in cui la successione $\left\{e^{-nx^2}\right\}$ è uniformemente convergente.

Esercizio 42. Consideriamo lo spazio normato $C^1([0,1])$ ponendo

$$\mathcal{N}(\varphi) = \sup_{t\in[0,1]} \left(|\varphi'(t)| + |\varphi(t)|\right)$$

e X il sottoinsieme delle funzioni tali che $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(1) = 0$. Dire se X è chiuso in $(C^1([0,1]), \mathcal{N})$.

Esercizio 43. Dire se la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \operatorname{arctang} \frac{x^4|y|}{x^4 + y^4}$$

è differenziabile nel suo campo di esistenza.

Esercizio 44. Determinare la più ampia regione di piano nella quale la trasformazione definita dalla legge

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 \\ v = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$

risulti invertibile. Stabilire se l'applicazione inversa è differenziabile.

Esercizio 45. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x + y \leq 1\,,\ x, y > 0\right\}$$

Esercizio 46. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(y^2 \log(x^2 + y^2) + 2\frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(2xy \log(x^2 + y^2) + \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}\right) dy$$

lungo il grafico della funzione $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $\gamma(t) = |\cos t\,|$.

Esercizio 47. Dire se la funzione $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è sommabile nell'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \leq x^2 + y^2 < 2z - z^2\right\}$$

ed eventualmente calcolare l'integrale

$$\int_E f(x,y,z)\, dxdydz.$$

Esercizio 48. Stabilire se la superficie di equazione $z = xy$ con

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \le 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 3 \le 0 \end{cases}$$

è regolare ed in caso affermativo calcolarne l'area.

Esercizio 49. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + xy^2 \operatorname{sen} x \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 50. Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 2y_1 + 4y_3 \\ y_3' = 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

Esercizio 51. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Esercizio 52. Sia X lo spazio $C^0([0,1])$ reso normato ponendo $\|f\| = \max_{[0,1]} |f(x)|$. Dire se il sottoinsieme di X delle funzioni tali che $f(0) = 0$ è chiuso in X.

Esercizio 53. Dire se la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{xy}{|x| + |y|}}$$

è differenziabile all'interno del suo campo di esistenza.

Esercizio 54. Assegnata la trasformazione definita dalla legge

$$\begin{cases} u = x^2(x+y) \\ v = x(x-y) \end{cases}$$

dire se risulta invertibile in un intorno del punto $(1,1)$.

Esercizio 55. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \operatorname{arcsen} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y \le \sqrt{x} \le 1\right\}$$

Esercizio 56. Calcolare l'integrale della forma differenziale
$$\omega(x,y) = \left(\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \frac{xy\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$
lungo la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $\gamma(t) = (\cos t, 4\operatorname{sen} t)$.

Esercizio 57. Dire se la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ è sommabile nell'insieme
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 2\,,\ \sqrt{x} < y\right\}$$
ed eventualmente calcolare l'integrale
$$\int_E f(x,y)\,dxdy.$$

Esercizio 58. Calcolare l'area della superficie del solido ottenuto ruotando la regione limitata del primo quadrante del piano racchiusa dalle parabole $y = x^2$ e $y = 2x^2$ attorno alla prima bisettrice.

Esercizio 59. Determinare le eventuali soluzioni del problema
$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen}^2 x \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 60. Determinare tutte le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 - 6y_3 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 + 8y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + 6y_3 \end{cases}$$

Esercizio 61. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,dx$ con errore inferiore a 10^{-2}.

Esercizio 62. Sia X l'insieme delle funzioni f di classe $C^1([0,1])$ tali che $f'(0) = f'(1)$. Dire se X è chiuso in $C^1([0,1])$ rispetto alla norma $\|f\| = \max_{[0,1]}|f(x)| + \max_{[0,1]}|f'(x)|$.

Esercizio 63. Dire se la funzione definita dalla legge
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3y}-1}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
è differenziabile all'interno del suo campo di esistenza.

Esercizio 64. Determinare la più ampia regione del piano dove la trasformazione definita dalla legge

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 \\ v = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$

risulta invertibile.

Esercizio 65. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = e^{x^2+2y^2-2x}$$

nell'insieme

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 - 2x \le 0\,, \ 0 \le x \le 1\big\}$$

Esercizio 66. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\frac{x^2}{x+y^2} + 2x\log(x+y^2)\right) dx + \frac{2x^2y}{x+y^2} dy$$

lungo la curva $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $\gamma(t) = 2(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Esercizio 67. Dire se la funzione $f(x,y) = x \arctang \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è sommabile nell'insieme

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 1\,, \ x > 0, \ y > 0\big\}$$

ed eventualmente calcolare l'integrale

$$\int_E f(x,y)\, dxdy.$$

Esercizio 68. Dimostrare che l'insieme

$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x^4 + 4y^2 \le 3\,, \ 0 \le z \le 1\big\}$$

è compatto e quindi calcolarne il volume.

Esercizio 69. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' - xy = 2xy^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo nel quale ciascuna di esse risulta essere soluzione.

Esercizio 70. Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -3y_2 + 6y_3 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' = -2y_1 + 2y_2 - 7y_3 \end{cases}$$

Esercizio 71. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} e^{-n}$ e calcolarne la somma nell'insieme dove risulta convergente.

Esercizio 72. Sia X l'insieme delle funzioni f di classe $C^0([0,1])$ tali che $\max_{[0,1]} f(x) < 1$. Dire se X è chiuso in $C^0([0,1])$ rispetto alla norma $\|f\| = \max_{[0,1]} |f(x)|$.

Esercizio 73. Dire se la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \log y^2 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

è differenziabile all'interno del suo campo di esistenza.

Esercizio 74. Dire se la trasformazione definita dalla legge

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = 2xy - \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

risulta invertibile in un intorno del punto $(1,1)$.

Esercizio 75. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = x^2 y \log(1 + x^2 + y^2)$$

nell'insieme

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y > 0 \right\}$$

Esercizio 76. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\sqrt{x^3+y^3} + \frac{3x^3}{2\sqrt{x^3+y^3}} \right) dx + \frac{3xy^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} dy$$

lungo la curva $\gamma : [\pi, 3\pi/2] \to \mathbb{R}$ definita dalla legge $\gamma(t) = (1+\cos t, 1+\operatorname{sen} t)$.

Esercizio 77. Dire se la funzione $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ è sommabile nell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leq 2x\right\}$$

ed eventualmente calcolare l'integrale

$$\int_E f(x,y)\, dxdy.$$

Esercizio 78. Calcolare l'integrale

$$\int_M \frac{z}{x^2+y^2}\, d\sigma$$

dove

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = xy\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ (x-2)^2 + y^2 \geq 4\right\}$$

Esercizio 79. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' - |y| = x^4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

precisando il più ampio intervallo nel quale ciascuna di esse risulta essere soluzione.

Esercizio 80. Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \\ y_3' = y_1 + y_3 \end{cases}$$