

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 29 gennaio 2024.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

1. **Gli studenti del terzo anno che hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare gli esercizi 3) e 4)**
2. **Gli studenti del terzo anno che non hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e tutti gli esercizi.**
3. **Gli studenti che portano il programma del Prof. Emmanuele devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).**

**Domanda di teoria 1.** Enunciare e dimostrare il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli

**Domanda di teoria 2.** Enunciare e dimostrare il teorema sull'intervallo di convergenza di una serie di potenze.

**Esercizio 1.** Calcolare

$$\int_{\log 2}^{\log 3} f(x) dx$$

dove la funzione  $f$  è definita dalla legge

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}$$

nel suo campo di esistenza.

**Esercizio 2.** Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione

$$\arcsen(xy^2 - x^2y)$$

nel suo campo di esistenza.

**Esercizio 3.** Calcolare

$$\int_M x^2 y^2 d\sigma$$

dove

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq R, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

essendo  $R$  un fissato numero reale positivo.

**Esercizio 4.** Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' = \cos(x - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

precisando, per ciascuna di esse, il più ampio intervallo nel quale sono definite.