

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 20 dicembre 2023.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

1. **Gli studenti del secondo anno che hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare gli esercizi 3) e 4)**
2. **Gli studenti del secondo anno che non hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e tutti gli esercizi.**
3. **Gli studenti degli anni precedenti al secondo devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).**

Domanda di teoria 1. Enunciare il teorema di Dini per una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ essendo $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e non vuoto. Provare il Teorema di Dini per una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ essendo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e non vuoto.

Domanda di teoria 2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione per una funzione di due variabili.

Esercizio 1. Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! + n^2 + 1}{n^n + \pi^n + 2} x^n$$

nel campo reale.

Esercizio 2. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione

$$xy(4x^2 + y^2 - 1)$$

nel dominio

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Esercizio 3. Sia dato il dominio

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4 \geq 0\}.$$

Dopo avere provato che esso è misurabile secondo Lebesgue, provare l'esistenza dell'integrale

$$\int_T \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}}$$

e calcolarlo.

Esercizio 4. Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' + y = x\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

precisando, per ciascuna di esse, il più ampio intervallo nel quale sono soluzioni.