

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 29 settembre 2023.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

1. Gli studenti del secondo anno che hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare gli esercizi 4) e 5)
2. Gli studenti del secondo anno che non hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e tutti gli esercizi.
3. Gli studenti degli anni precedenti al secondo devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).

**Domanda di teoria 1.** Enunciare e dimostrare il Teorema di Dini per funzioni di due variabili.

**Domanda di teoria 2.** Enunciare e dimostrare il Teorema di Schwartz.

**Esercizio 1.** Discutere della sviluppabilità in serie di MacLaurin della funzione

$$\frac{x^3}{4+x^2}$$

e scriverne lo sviluppo nel più ampio intervallo ove ciò sia possibile.

**Esercizio 2.** Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione

$$x^2(y-1) + \arcsen(x^2(y-1))$$

nel suo campo di esistenza.

**Esercizio 3.** Determinare il più ampio aperto connesso nel quale la forma

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy-1)}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

ammette potenziale e scrivere la legge di uno di essi.

**Esercizio 4.** Sia dato il dominio

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq \sqrt{2}x^2, \frac{2}{9}x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Dopo avere provato che esso è misurabile secondo Lebesgue, provare l'esistenza dell'integrale

$$\int_T \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$$

e calcolarlo.

**Esercizio 5.** Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x-1}y + 2\sqrt{y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

precisando, per ciascuna di esse, il più ampio intervallo nel quale sono soluzioni.