

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 11 settembre 2023.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

N. B.:

- Gli studenti del secondo anno che hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare gli esercizi 3) e 4).
- Gli studenti del secondo anno che non hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e tutti gli esercizi.
- Gli studenti degli anni precedenti al secondo devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).

Domanda di teoria 1. Si enunci e si dimostri il Teorema di Banach-Caccioppoli sulle contrazioni

Domanda di teoria 2. Si enunci e si dimostri il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 1. Discutere l'applicabilità del Teorema del Dini all'equazione

$$2x + y + \arctang y = 0$$

e studiare il grafico delle eventuali funzioni implicite definite dall'equazione data.

Esercizio 2. Determinare gli estremi assoluti e gli eventuali estremi relativi della funzione

$$\arcsen((x + y)|y - x^2|)$$

nel suo campo di esistenza

Esercizio 3. Sia dato il dominio

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \geq 2, x^2 + 2y^2 + 4y \leq 0\}.$$

Dopo avere provato che esso è misurabile secondo Lebesgue, provare l'esistenza dell'integrale

$$\int_T \frac{|x| - y^5}{x^2 + y^2} dx dy$$

e calcolarlo.

Esercizio 4. Determinare tutte le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + x\sqrt[3]{y} \sen x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

precisando, per ciascuna di esse, il più ampio intervallo nel quale sono soluzioni.