

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 17 luglio 2023.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

N. B.:

- Gli studenti del secondo anno che hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare gli esercizi 4) e 5).
- Gli studenti del secondo anno che non hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e tutti gli esercizi.
- Gli studenti degli anni precedenti al secondo devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).

Domanda di teoria 1. Si enunci e si dimostri il teorema di U. Dini

Domanda di teoria 2. Si enunci e si dimostri il teorema di rettificabilità per una curva piana regolare

Esercizio 1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \operatorname{sen} n}{(n+1)^2} e^{(2n+1)x/(x+1)}$$

precisando in quali intervalli di \mathbb{R} essa è uniforme.

Esercizio 2. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = \frac{1}{1 + (1 - x^2 - y^2)^2}$ nella parte limitata di piano individuata dalla curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Esercizio 3. Dopo avere stabilito la misurabilità dell'insieme E individuato dalle limitazioni

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2 \right\}$$

calcolare l'integrale $\int_E xy \, dx dy$.

Esercizio 4. Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' + |y| = y^2 e^x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ precisando il più ampio intervallo possibile nel quale ogni funzione trovata risulta essere soluzione.