

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 26 giugno 2023.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

**N. B.:**

- Gli studenti del secondo anno che hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare gli esercizi 4) e 5).
- Gli studenti del secondo anno che non hanno superato le prove in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e tutti gli esercizi.
- Gli studenti degli anni precedenti al secondo devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).

**Domanda di teoria 1.** Si enunci e si dimostri il Teorema di Banach-Caccioppoli sulle contrazioni

**Domanda di teoria 2.** Si enunci e si dimostri il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange.

**Esercizio 1.** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1} \arcsen \frac{n+2}{n^2 + 1}$$

**Esercizio 2.** Determinare gli estremi della funzione  $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$  in

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 2y^2 \leq 2\}.$$

**Esercizio 3.** Provare che l'equazione

$$\int_0^x \frac{e^{-t^2} y}{t^2 + 1} dt + y = 0$$

definisce la variabile  $y$  in funzione di  $x$ . Detta  $\varphi(x)$  la funzione implicita, dire se l'origine è punto di estremo relativo per  $\varphi(x)$ .

**Esercizio 4.** Dopo avere stabilito la misurabilità dell'insieme  $E$  individuato dalle limitazioni

$$E = \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

calcolarne il volume.

**Esercizio 5.** Determinare le eventuali soluzioni del problema

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{2x} = 5x^2 y^5 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

nel più ampio intervallo possibile.