

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA – A.A.2022-23

Dipartimento di Matematica e Informatica – Corso di laurea triennale in Matematica

Prova di **Analisi Matematica II** assegnata il giorno 3 aprile 2023.

Tempo a disposizione: **150 minuti**. Durante lo svolgimento **NON È PERMESSO** consultare libri, appunti o formulari. È altresì **vietato** l'uso di qualsiasi tipo di **DISPOSITIVO ELETTRONICO** pena l'**ANNULLAMENTO DELLA PROVA**.

**N. B.:**

- Gli studenti del secondo anno che hanno superato la prima prova in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e gli esercizi 2) e 3).
- Gli studenti del secondo anno che non hanno superato la prima prova in itinere dovranno affrontare i due quesiti di teoria e gli esercizi 1), 2) e 3).
- Gli studenti degli anni precedenti al secondo devono affrontare solo gli esercizi 1), 2), 3) e 4).

**Domanda di teoria 1.** Si enunci e si dimostri il Teorema di Banach-Caccioppoli sulle contrazioni

**Domanda di teoria 2.** Si enunci e si dimostri il Teorema di Fermat.

**Esercizio 1.** Determinare l'insieme di convergenza puntuale della successione  $\{(1 - \sin x)^n\}$  in  $\mathbb{R}$ . Stabilire poi gli eventuali intervalli in cui la convergenza risulti uniforme.

**Esercizio 2.** Determinare gli estremi della funzione  $f(x, y) = (1 - x)^2xy^2 + e^{-((1-x)^2xy^2)^2}$  in

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

**Esercizio 3.** Si scriva la serie di Fourier della funzione  $f(x) = x^2$  in  $[0, 2\pi]$ . Si discuta circa l'eventuale convergenza puntuale della serie.

**Esercizio 4.** Dopo avere stabilito la misurabilità dell'insieme  $T$  individuato dalle limitazioni

$$\begin{cases} y \leq (x - 1)^2 \\ y \leq (x + 1)^2 \\ y \geq 0 \\ |x| \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sin |x^2 - y| \end{cases}$$

calcolare

$$\int_T x^3 dx dy dz$$