L'esistenza di un elemento minimo è formalizzata dal predicato $\exists x \forall y(x \leq y)$.
L'ordinamento è detto totale se $\forall xy(x \leq y \vee y \leq x)$.
Possiamo *definire* il predicato binario $x < y$ come abbreviazione sintattica per $x \leq y \ \wedge \neg(x = y)$. Diremo allora che una relazione di ordinamento è *densa* se $\forall xy(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$.

Gruppi

L'alfabeto è composto da un simbolo di costante e, un simbolo di funzione unario $(\ )^{-1}$ (funzione di inversione), ed un simbolo di funzione binario $\cdot$ (composizione).
Come unico predicato si considera quello di uguaglianza.
Un *gruppo* è un modello di:

1. $\forall xyz((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
2. $\forall x(x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x)$
3. $\forall x(x \cdot x^{-1} = e \wedge x^{-1} \cdot x = e)$

Il gruppo è detto *abeliano* se vale la proprietà commutativa, i.e.

$$\forall xy(x \cdot y = y \cdot x)$$

L'unicità dell'elemento neutro di un gruppo è espressa dal predicato

$$\forall xy((y \cdot x = y \wedge x \cdot y = y) \rightarrow y = e)$$

In generale, dato un predicato P, l'esistenza ed unicità di un elemento x per cui vale P (abitualmente indicato con la notazione $\exists! xP$) può essere definita al primo ordine come

$$\exists x(P(x) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow x = z))$$

Aritmetica

L'alfabeto si compone di una costante 0, un simbolo di funzione unario s per il successore, e due simboli di funzione binaria $+$ e $*$ per somma e prodotto.
Come unico simbolo di predicato si considera l'uguaglianza. La seguente formalizzazione dell'aritmetica, che nel seguito indicheremo con PA, si deve al matematico italiano Peano:

1. $\forall x(\neg 0 = s(x))$
2. $\forall xy(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$
3. $\forall x(x + 0 = x)$
4. $\forall xy(x + s(y) = s(x + y))$
5. $\forall x(x * 0 = 0)$

6. $\forall xy(x * s(y) = x + (x * y))$
7. $(P(0) \land \forall x(P(x) \to P(s(x)))) \to \forall x P(x)$

L'ultimo "assioma" è in realtà uno *schema* di assioma: $P(x)$ può essere un qualunque predicato definibile nel linguaggio che contiene un'unica variabile libera x.
L'interpretazione intesa di PA è la struttura ordinaria dei numeri naturali nella quale "=" è interpretato come l'uguaglianza tra numeri naturali, 0 come il naturale 0, s come la funzione successore, $+$ e $*$ rispettivamente come somma e prodotto.
Tale interpretazione, detta *modello standard* dell'aritmetica, non è l'unica possibile; nel paragrafo 5.4.5 discuteremo l'esistenza di interpretazioni di natura differente.

Insiemi ⋆

Vediamo come è possibile formalizzare la nozione intuitiva di insieme nella logica del primo ordine. L'assiomatizzazione della Teoria degli Insiemi è particolarmente "delicata". Supponiamo di introdurre un predicato binario (infisso) $x \in y$ per denotare l'appartenenza di x ad y.
Una proprietà naturale che ci si aspetta è che, dato un qualunque predicato $P(x)$, si possa formare l'insieme degli elementi x per cui vale $P(x)$, cioè che esista un insieme z (intuitivamente, $z = \{x \mid P(x)\}$) tale che $x \in z \leftrightarrow P(x)$, che conduce al seguente schema di assioma, noto come *assioma di comprensione*

$$\exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow P(x))$$

Questo fu introdotto da Cantor alla fine del secolo scorso. Nel 1902, Russel mostrò in una lettera a Frege come questo assioma conduca in realtà ad un paradosso, noto appunto come paradosso di Russel. L'idea è estremamente semplice. Poiché lo schema di comprensione vale per ogni predicato $P(x)$, allora vale anche per $P(x) = \neg(x \in x)$. In particolare, si ha

$$\exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow \neg(x \in x))$$

È facile dimostrare che questa formula è insoddisfacibile. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una interpretazione $(\mathcal{A}, \xi^{\mathcal{A}})$ che la soddisfa. Allora deve esistere un elemento $a \in D_{\mathcal{A}}$ tale che $(\mathcal{A}, \xi^{\mathcal{A}}[^a/_z]) \models \forall x(x \in z \leftrightarrow \neg(x \in x))$. Poichè questa formula deve essere soddisfatta per ogni x, in particolare deve essere soddisfatta interpretando x con a, cioè si deve avere $(\mathcal{A}, \xi^{\mathcal{A}}[^a/_z][^a/_x]) \models x \in z \leftrightarrow \neg(x \in x)$. Ma questo è equivalente a dire $(\mathcal{A}, \xi^{\mathcal{A}}[^a/_x]) \models x \in x \leftrightarrow \neg(x \in x)$, che è ovviamente impossibile, indipendentemente dall'interpretazione di $\in$. In termini meno formali, consideriamo l'insieme $W = \{x | x \notin x\}$ (l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elemento). Per come è definito W, si ha $W \in W \leftrightarrow W \notin W$, che è chiaramente contraddittorio.
Dunque, l'assioma di comprensione, nella forma generale suggerita da Cantor,