Appunti di LOGICA MATEMATICA (a.a.2009-2010; A.Ursini)
[**Aiii** [17 pagine]]

(Come si lavora in) deduzione naturale

REGOLE DELLA DEDUZIONE NATURALE PROPOSIZIONALE

Introduzione ed eliminazione della congiunzione

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}\wedge \mathrm{I} \qquad\qquad \frac{P \wedge Q}{P}\wedge \mathrm{E} \qquad\qquad \frac{P \wedge Q}{Q}\wedge \mathrm{E}$$

Introduzione della disgiunzione:

$$\frac{P}{P \vee Q}\vee \mathrm{I} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}\vee \mathrm{I}$$

Eliminazione della disgiunzione:

$$\frac{P \vee Q \qquad \begin{array}{c}[P]^1\\ |\\ R\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Q]^2\\ |\\ R\end{array}}{R}\vee \mathrm{E}\,(1)(2)$$

Introduzione dell' implicazione:

$$\frac{\begin{array}{c}[P]^1\\ |\\ Q\end{array}}{P \to Q}\to \mathrm{I}(1)$$

Eliminazione dell' implicazione ("*modus ponens*"):

$$\frac{P \qquad P \to Q}{Q}\to \mathrm{E}$$

Regola del falso (*ex falso quodlibet*):

$$\frac{\perp}{P}\perp$$

Introduzione ed eliminazione della negazione:

$$\frac{\begin{array}{c}[P]^1\\ |\\ \perp\end{array}}{\neg P}\neg \mathrm{I}(1) \qquad\qquad \frac{P \qquad \neg P}{\perp}\neg \mathrm{E}$$

Reductio ad absurdum

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg P]^1\\ |\\ \perp\end{array}}{P}\mathrm{RAA}\,(1)$$

Sia $\Gamma \subseteq FBF$ un insieme di formule proposizionali, e sia $P \in FBF$. La nozione di **albero di derivazione (a.d.d.) di P (conclusione) da assunzioni in Γ** e' definita per induzione.

[In effetti, definiamo dei grafi planari costruiti come "disegni" usando occorrenze di formule, linee orizzontali (" di conclusione"), nomi di regole, e la parentesi [,] decorate con degli indici numerici.]

–Passo base:

$\cdot\ P$

è un a.d.d. di P da $\{P\}$; esso si rappresenta scrivendo la formula P.

[Questo rappresenta un passo iniziale di una derivazione: consiste nell' assumere una ipotesi o assunzione, che a questo punto e' anche conclusione (da se stessa).]

–Passi induttivi (uno per ciascuna regola):

– Se D, D' sono a.d.d. di P da Γ, e di Q da Γ', allora un a.d.d. di $P \wedge Q$ da $\Gamma \cup \Gamma'$ sara':

$$\frac{D \qquad D'}{P \wedge Q} \wedge \mathrm{I}$$

– Se D è un a.d.d. di $P \wedge Q$ da Γ, allora

$$\frac{D}{P} \wedge \mathrm{E} \qquad\qquad \frac{D}{Q} \wedge \mathrm{E}$$

sono a.d.d. rispettivamente di P e di Q da Γ.

E si prosegue induttivamente con una clausola per ciascuna regola. Vediamo il caso di regole che consentono lo scarico di assunzioni.

– Se D e ' un a.d.d. di Q da $\Gamma \cup \{P\}$, allora

$$\frac{D \star ([P]_n)}{P \to Q} \to \mathrm{I}(n)$$

è un a.d.d. di $P \to Q$ da Γ in cui $D \star ([P]_1)$ si ottiene come segue: le assunzioni presenti in D che siano occorrenze della formula P vengono decorate con le parentesi $[,]$ e con una cifra n "nuova" (non ancora utilizzata) che é riportata accanto al nome della regola, e sono quelle considerate scaricate. (Solitamente esse si saricano tutte, ma basterebbe semplicemente concedere di poterle scaricare.)

– Se D è un a.d.d. di $\perp$ da $\Gamma \cup \{\neg P\}$, allora

$$\frac{D \star ([\neg P]_n)}{\perp} RAA(n)$$

è un a.d.d. di P da Γ, in cui $D \star ([\neg P]_n$ si ottiene da D decorando con [ ] e con un indice nuovo (da riportare poi nel nome della regola) le occorrenze di $\neg P$ tra le assunzioni di D.

Il lettore fará un utile esercizio completando la definizione induttiva di albero di derivazione di una formula da un insieme (finito) di formule, considerando una ad una tutte le regole della deduzione naturale.

Per indicare che siamo in grado di costruire un albero di derivazione che porta da certe assunzioni non scaricate che sono comprese nella lista $P_1 \cdots, P_n$ ad una conclusione Q, scriviamo:

$$P_1, \cdots, P_n \vdash Q$$

Puó succedere che siamo in grado di costruire un albero di derivazione con conclusione $B\, vera$ ed in cui tutte le assunzioni sono state scaricate cioè siamo nel caso (n = 0); in tal caso scriveremo:

$$\vdash B.$$

e allora il giudizio $B\, vera$ sará chiamato un **teorema logico** ovvero una **legge logica classica** .

1. Come si lavora in Deduzione Naturale

N.B.1. Per come sono fatte le regole, é intuitivo che per ottenere

$$(\star) \qquad P_1, \cdots, P_n \vdash Q$$

é *necessario* che $P_1, \ldots, P_n \models Q$; questo verrá dimostrato piu' avanti (Teorema di validitá). *Negli esercizi è buona norma pertanto controllare che tra assunzioni e conclusione sia soddisfatta la relazione $\models$ di conseguenza logica;* in mancanza di ció sarebbe tempo perso cercare un albero di derivazione !

2.Spesso é anche utile ricorrere al seguente *principio euristico*: per cercare un albero di derivazione con un dato giudizio conclusivo si parte dal risultato come se fosse acquisito e, dal basso verso l'alto, si analizza passo passo quale possa essere la regola di introduzione che è stata applicata: questo ovviamente se la conclusione non é atomica. Ad ogni passo ci si trova con una proposizione di forma piú semplice rispetto a quella che si vuole dedurre e allo stesso tempo (se la regola prevede scarico) puo' darsi di aver ulteriori assunzioni.

Quando la conclusione corrente non sia composta, si passa all' altro verso, dalle premesse correnti verso la conclusione corrente. Di solito il problema iniziale viene cosí ridotto man mano ad atri piú semplici: una volta che per questi si trova una deduzione, si incollano i vari alberi per trovare la soluzione.

Questo non si puo' prendere come metodo risolutivo sempre efficace: per es. se la conclusione momentanea sia una disgiunzione, e' ben raro (ma ovviamente é possibile) che sia introdotta da $\vee I$, per il semplice motivo intuitivo che A-vera é piú pregna di informazione che non $A \vee B$- vera. Inoltre la regola classica per eccellenza, ossia la RAA, non si presta correntemente a questa strategia, in quanto non è una regola di "introduzione" né una regola di "eliminazione".

Qui c'e' poco da approfondire; si tratta di fare molti esercizi, in prima persona: non si puo' imparare a nuotare guardando qualcun' altro che si allena in piscina.

Qualche esempio semplice(le lettere latine quali $A, B, \ldots$ stanno a denotare formule.) Per altri esempi, ved. testo di Asperti-Ciabattoni, paragrafo 2.2.

$$\text{(i)} \qquad A \vdash A, \text{ onde } \vdash A \to A$$

(che qualcuno chiama *la* legge logica fondamentale): bastano rispettivamente i seguenti due a.d.d.

$$(o) \qquad \cdot A$$

e

$$\frac{[A]^1}{A \to A} \to I(1)$$

Quest' ultima significa che prima costruiamo (o) e poi provediamo con $\to I$, scaricando la A che é presente in (o) in quanto assunzione. Potremmo procedere in modo diverso:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]^1 \qquad [A]^1}{A \wedge A} \wedge I}{A} \wedge I}{A \to A} \to I(1)$$

Questo sottolinea che se esiste un a.d.d. per $(\star)$ allora ne esistono infiniti: le soluzioni di un esercizio possono ben essere diverse.

$$\text{(ii)} \qquad A, B \vdash A$$

L'a.d.d. (o) serve anche per (ii).

$$\text{(iii)} \qquad A \vdash A \vee A; \text{ ed anche } A \vee A \vdash A$$

La prima si puó ottenere con una applicazione di $\vee I$. per la seconda:

$$\frac{A \vee A \qquad [A]^1 \qquad [A]^2}{A} \vee E(1,2)$$

$$\text{(iv)} \qquad B \vdash A \to B$$

Ecco un a.d.d.:

$$\frac{B}{A \to B}$$

oppure:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]^1 \qquad B}{A \wedge B} \wedge I}{B} \wedge E}{A \to B} \to I(1)$$

ESEMPIO 1.

Mostrare che:

$$A \to B, A \to C \vdash A \to (B \wedge C).$$

(a).Dobbiamo costruire un albero che abbia come foglie "vive" (non scaricate) le premesse $A \to B, A \to C$- che possono anche comparire piú di una volta - e come "radice" la conclusione $A \to (A \wedge B)$:

$$\begin{array}{c} A \to B, A \to C \\ \backslash|/? \\ \hline A \to (A \wedge B) \end{array}$$

Si tratta di riempire il percorso per ora incognito indicato come "\|/?.

Analizziamo la conclusione corrente: essa è una implicazione (da A a $B \wedge C$;) tentiamo pertanto di trovare un albero che utilizza – oltre alle premesse precedenti, anche – la premessa A e che concluda con $B \wedge C$. (Se ci riusciamo, poi avremo risolto il problema precedente, per mezzo della regola di $\to$-I).

(b)Pertanto, ci spostiamo al problema di trovare un albero come segue:

$$\begin{array}{c} A \to B, A \to C, A \\ \backslash|/? \\ \hline B \wedge C \end{array}$$

A questo punto la conclusione è una congiunzione; pertanto proviamo a trovare due alberi che dalle date premesse concludano rispettivamente con B e con C; se ci riusciamo, poi con la regola di $\wedge$-I, avremo anche risolto il problema (b) - e quindi anche (a).

(c1) Dobbiamo trovare un albero:

$$\begin{array}{c} A \to B, A \to C, A \\ \backslash|/?1 \\ \hline B \end{array}$$

ed inoltre

(c2) dobbiamo trovare un albero:

$$\begin{array}{c} A \to B, A \to C, A \\ \backslash|/?2 \\ \hline C \end{array}$$

Per i sottoproblemi (c1) e (c2), non possiamo continuare allo stesso modo, ossia "smontando" la conclusione: sia B che C potrebbero essere proposizioni atomiche. Tenteremo pertanto con le regole di eliminazione a passare dalle premesse di (c1) e di (c2) alle loro conclusioni. Nel caso in esame, i sottoproblemi (c1) e (c2) hanno delle soluzioni immediate, usando la regola del modus ponens:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}; \qquad \frac{A \qquad A \to C}{C}.$$

A questo punto possiamo presentare nella sua interezza una soluzione del problema, partendo adesso dalle foglie (assunzioni) e procedendo verso la radice:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad A \to B}{B}(\to \mathrm{E}) \qquad \dfrac{[A]^1 \quad A \to C}{C}(\to \mathrm{E})}{\dfrac{B \wedge C}{A \to (B \wedge C)}(\to \mathrm{I})(1)}(\wedge \mathrm{I})$$

Si noti che in ciascuna applicazione di regole **segnaliamo di quale regola si tratti.** Inoltre che nell' applicazione della regola →-I abbiamo anche **segnalato che in questo momento si stanno scaricando entrambe le occorrenze della premessa** A **segnate con** ^{1}**,** e **solamente***a questo punto* entrambe sono state messe entro parentesi [ ]. Restano quindi attive - non scaricate - le sole assunzioni $A \to B, A \to C$.

ESEMPIO 2.

Mostrare che

$$A \to C, B \to C \vdash (A \vee B) \to C.$$

Il problema è di trovare un albero:

$$\begin{array}{c} A \to C, B \to C \\ \backslash | / \\ \hline (A \vee B) \to C \end{array}$$

Proviamo a ridurci a quello di trovare un albero

$$\begin{array}{c} A \to C, B \to C, (A \vee B) \\ \backslash | / \\ \hline C \end{array}$$

Qui C non non si presenta come composta; pertanto a questo punto tenteremo di far ricorso alle regole di eliminazione. Siccome una premessa qui è una disgiunzione, è naturale provare con la regola ∨-E. Cerchiamo pertanto un albero (b1):

$$\begin{array}{c} A \to C, B \to C, A \\ \backslash | / \\ \hline C \end{array}$$

nonchè un albero (b2):

$$\begin{array}{c} A \to C, B \to C, B \\ \backslash | / \\ \hline C \end{array}$$

allora infatti potremo applicare ∨-E (scaricando A e B):

$$\frac{A \vee B \qquad (b1) \qquad (b2)}{C}.$$

Ora è chiaro che (b1) e (b2) si possono trovare usando →E:

$$\frac{A \qquad A \to C}{C} \qquad \frac{B \qquad B \to C}{C}.$$

In conclusione possiamo dare un albero di derivazione che risolve il problema come segue:

$$\dfrac{[A \vee B]^3 \qquad \dfrac{[A]^1 \quad A \to C}{C}(\to \mathrm{E}) \qquad \dfrac{[B]^2 \quad B \to C}{C}(\to \mathrm{E})}{\dfrac{C}{(A \vee B) \to C}(\to \mathrm{I}), (3)}(\vee \mathrm{E})(1)(2)$$

Anche qui si mettono tra parentesi quadre – al momento dello scarico – le formule che via via si scaricano, segnalando anche in base alla applicazione di quale regola si effettua tale scarico.

ESEMPIO 3.

Mostrare che:

$$A \vee B, C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

La conclusione è una disgiunzione, e saremmo tentati di ipotizzare che essa sia stata prodotta da $\vee$-I. Questo vorrebbe dire che dalle assunzioni $A \vee B, C$ vorremmo poter dedurre $A \wedge C$ (oppure l'altra $B \wedge C$). Ma ció non è possibile *in generale*: se B, C sono vere e A è falsa, allora $A \vee B$ sará ancora vera, C è vera ma la presunta conclusione $A \wedge C$ è falsa.

Tentiamo allora con le regole di eliminazione: siccome tra le assunzioni solo la $A \vee B$ si presenta come composta, proveremo a ridurre il problema al seguente: trovare due alberi (b1):

$$\dfrac{\begin{array}{c} C, A \\ \backslash | / \end{array}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$$

e (b2):

$$\dfrac{\begin{array}{c} C, B \\ \backslash | / \end{array}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$$

Dopodichè potremo utilizzare $\vee$E per risolvere il problema:

$$\dfrac{A \vee B \qquad (\mathrm{b1}) \qquad (\mathrm{b2})}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$$

- notate che in questa applicazione di $\vee$-E scaricheremo le assunzioni A e B presenti in cima a (b1) e (b2)-.

Trovare (b1) e (b2) non è difficile: riproviamo con il solito principio, e cioè - per (b1) - riduciamo il problema a dedurre da A, C una delle due componenti della disgiunzione conclusiva di (b1): è evidente allora che per (b1) possiamo prendere:

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad C}{A \wedge C}(\wedge \mathrm{I})}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}(\vee \mathrm{I})$$

ed in modo simile si trova (b2). Allora un albero di derivazione che risolve il problema iniziale è:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad C}{A \wedge C}\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^2 \quad C}{B \wedge C}\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}\vee\mathrm{I}}{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}\vee\mathrm{E}(1)(2)$$

ESEMPIO 4.

Mostrare che $(A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A)$ è una legge logica.

Schematizziamo lo svolgimento. In primo luogo, il problema si riduce a trovare un albero della forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ \backslash|/ \end{array}}{(\neg B) \to (\neg A)}$$

Questo a sua volta si riduce a trovare:

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \to B, \neg B \\ \backslash|/ \end{array}}{\neg A}$$

Esso a sua volta si riduce a trovare

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \to B, \neg B, A \\ \backslash|/ \end{array}}{\bot}$$

A questo punto lavoriamo sulle assunzioni $A \to B, \neg B, A$ con regole di eliminazione allo scopo di ottenere $\bot$: ció si puó avere da $B, \neg B$ per $\neg$E; e a sua volta B si ricava da $A, A \to B$ con la regola di $\to$E. Un albero che risolve il problema è il seguente (tutte le assunzioni sono prima o poi scaricate):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [A \to B]^3}{B}\to\mathrm{E} \qquad [\neg B]^2}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg A}\neg\mathrm{I}(1)}{\neg B \to \neg A}\to\mathrm{I}(2)}{(A \to B) \to ((\neg B \to (\neg A))}\to\mathrm{I}(3)$$

Degli ultimi esempi diamo direttamente una soluzione. ESEMPIO 5.

$$(\neg(\neg(\neg A))) \vdash \neg A.$$

Ecco una possibile soluzione:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad [\neg A]^1}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\neg\mathrm{I}(1)}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg A}\neg\mathrm{I}(2)$$

ESEMPIO 6.

$$\vdash (\neg(\neg(A \wedge B))) \rightarrow ((\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)).$$

Una soluzione possibile si ottiene facendo prima:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}\wedge\mathrm{E} \qquad [\neg A]^2}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg(A \wedge B)}\neg\mathrm{I}(1) \qquad \neg\neg(A \wedge B)}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\neg\mathrm{I}(2)$$

D'altro lato con lo stesso schema si ottiene la conclusione $\neg\neg B$, ed infine si aggiunge come passo finale una applicazione di $\wedge$I per ottenere la conclusione desiderata.

ESEMPIO 7.

(*"Tertium non datur"*) $\vdash A \vee (\neg A)$.

Una possibile derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee (\neg A)}\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(A \vee (\neg A))]^3}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg A}\neg\mathrm{I}(1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2}{A \vee (\neg A)}\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(A \vee (\neg A))]^4}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\neg\mathrm{I}(2)}{\bot}\neg\mathrm{E}}{A \vee (\neg A)}\mathrm{RAA}(3)(4)$$

ESEMPIO 8.

(*"Doppia negazione"*) $\vdash (\neg\neg A) \rightarrow A$.

Ecco una possibile derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \qquad [\neg\neg A]^2}{\bot}\neg\mathrm{E}}{A}\mathrm{RAA}(1)}{(\neg\neg A) \rightarrow A}\rightarrow\mathrm{I}(2)$$

ESEMPIO 9.

$$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A).$$

Si puó ottenere come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\backslash|/}{A \vee (\neg A)}(\text{Esempio7}) \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^3}{B \rightarrow A}\rightarrow\mathrm{I}}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^4 \qquad [A]^1}{\bot}\neg E}{B}(\bot)}{A \rightarrow B}\rightarrow\mathrm{I}(1)}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\vee\mathrm{I}}{(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)}\vee\mathrm{E}(3)(4)$$

ESEMPIO 10.

$$A \rightarrow B \vdash (\neg A) \vee B.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1}{(\neg A)\vee B}\vee\mathrm{I}\qquad[\neg((\neg A)\vee B)]^2}{\bot}\neg\mathrm{E}}{A}\mathrm{RAA}(1)\qquad A\to B}{B}\to\mathrm{E}}{(\neg A)\vee B}\vee\mathrm{I}\qquad[\neg((\neg A)\vee B)]^3}{\bot}}{(\neg A)\vee B}\mathrm{RAA}(2)(3)$$

ATTENZIONE. Presentiamo qui una presunta derivazione che vorrebbe mostrare che $\vdash A \to B$, *quali che siano* A, B proposizioni.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^3\qquad[\neg A]^1}{\bot}\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\neg\mathrm{I}(1)(2)(\mathrm{ERRORE\ !})\qquad[\neg A]^2}{\bot}\neg\mathrm{E}}{B}\bot}{A\to B}\to\mathrm{I}(3)$$

Il fatto che nell' applicare la regola $\neg$I si poteva scaricare la occorrenza 1 della formula $\neg A$, ma non la occorrenza 2 della stessa formula: questa non sta nel sottoalbero la cui ultima regola e' $\neg$I .

2. ESERCIZI DI DEDUZIONE NATURALE PROPOSIZIONALE.

1. $(A \wedge B) \vee A \vdash A$.
2. $A \vdash (A \wedge B) \vee A$.
3. $A \to B, B \to A \vdash (A \vee B) \to (A \wedge B)$.
4. $(\neg A) \vee B \vdash A \to B$.
5. $A \vee C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C$.
7. $A \vee B \vdash B \vee A$.
8. $A \wedge B \vdash B \wedge A$.
9. $A \wedge (B \vee C) \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.
10. $\vdash A \to (\neg\neg A)$.
11. $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C))$.
12. $\vdash ((A \wedge B) \to C)) \to (A \to (B \to C))$.
13. $\vdash (\neg A) \to (\neg\neg\neg A)$.
14. $(A \vee B) \to (A \wedge B) \vdash A \to B$.
15. $\vdash A \to (B \to A)$.
16. $A \to (\neg A) \vdash \neg A$.
17. $(\neg A) \vee B \vdash A \to B$.

18. $(\neg A) \vee (\neg B) \vdash \neg(A \wedge B)$.
19. $A \to B \vdash \neg(A \wedge (\neg B))$.
20. $A \wedge B \vdash \neg((\neg A) \vee (\neg B))$.
21. $\neg(A \to B) \vdash A$.
22.(Legge di PEIRCE) $((A \to B) \to A) \vdash A$.
23. $\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$.
24. $\neg(A \wedge (\neg B)) \vdash A \to B$.
25. $\neg((\neg A) \vee (\neg B)) \vdash A \wedge B$.
26.(”*Consequentia mirabilis*”) $\vdash ((\neg A) \to A) \to A$.
27. $(\neg A) \to (\neg B) \vdash B \to A$.
28. $(\neg A) \to B \vdash A \vee B$.
29. $\neg((\neg A) \wedge (\neg B)) \vdash A \vee B$.
30. $(\neg A \to B), B \to C, \neg C \vdash A$.

Ecco alcuni suggerimenti per gli esercizi.

(N.21). Osservare prima che $\neg A \vdash A \to B$ - si usi l'esercizio 4 -. Allora con l'assunzione $\neg(A \to B)$ si ottiene $\perp$. Poi con RAA, etc.

(N.22). Utilizzando l'esempio 4, ottenere $\neg(A \to B)$ dalle assunzioni $(A \to B) \to A, \neg A$. Quindi, con l'esercizio 21, ricavare A; di nuovo utilizzare l'assunzione $\neg A$ per avere $\perp$, ad infine con RAA ottenere A (scaricando $\neg A$).

(N.23). Negando la conclusione -ossia assumendo $\neg((\neg A \vee (\neg B))$- ricavare A e B - assumendo anche, per poi scaricarle con RAA - rispettivamente $\neg A$ e $\neg B$. Cosí si ricava $A \wedge B$ e quindi $\perp$, usando l'assunzione $\neg(A \wedge B)$. Si conclude con RAA.

(N.25). Prima si usi l'esercizio 23: insieme all'assunzione attuale si ricava $\perp$; e si conclude con RAA.

Le regole per la deduzione naturale classica al primo ordine.

In primo luogo, abbiamo le regole di introduzione ed eliminazione per i connettivi come nel caso proposizionale, e la RAA. Naturalmente, ora con $P, Q, \ldots,$ intendiamo FBF del primo ordine.

In piú, abbiamo le seguenti regole sui quantificatori (A, B sono formule qualunque del primo ordine) e poi le regole su $\doteq$:

INTRODUZIONE DI $\forall$:

$$\frac{A}{\forall x A}\forall I$$

con la **condizione** che x non abbia occorrenze libere in assunzioni non scaricate nella sottoderivazione che coinclude con A..

ELIMINAZIONE DI $\forall$:

$$\frac{\forall x A}{A[t/x]}\forall E$$

INTRODUZIONE DI $\exists$:

$$\frac{A[t/x]}{\exists x A}\exists E$$

ELIMINAZIONE DI $\exists$:

$$\frac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}[A]_n \\ | \\ B\end{array}}{B}\exists E, (n)$$

con le **condizioni** che x non sia libera in B né sia libera in alcuna assunzione, diversa da A, non scaricata nella sottoderivazione di conclusione B. Si noti che la regola consente di scaricare le ipotesi di forma A che occorrono nella sottoderivazione di conclusione B.

La regola $\exists E$ si puó formulare come segue:

$$\frac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}[A[y/x]]_n \\ | \\ B\end{array}}{B}\exists E, (n)$$

con le condizioni che y non sia libera in B né sia libera in alcuna assunzione diversa da $A[y/x]$, non scaricata nella sottoderivazione di conclusione B .

3.1. *Uguaglianza*. Passiamo ora alle regole su $\doteq$. É necessario aggiungere regole sull' eguaglianza poiché abbiamo stabilito che tale segno va interpretato non su una generica relazione binaria, ma, in qualunque struttura, come l' identitá. Le regole che porremo sono quindi le regole formali dell' identitá.

Le REGOLE SULL 'UGUAGLIANZA sono:

$$\frac{}{x \doteq x} RIF$$

dove x é un qualunque segno di variabile; questa é una regola che non ha bisogno di premesse.

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \quad \ldots x_n \doteq y_n}{t[\vec{x}/\vec{z}] \doteq t[\vec{y}/\vec{z}]}$$

dove t é un qualunque termine e $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sono sequenze di segni di variabili della stessa lunghezza.

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \quad \ldots x_n \doteq y_n}{A[\vec{x}/\vec{z}] \to A[\vec{y}/\vec{z}]}$$

dove A é una formula e $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sono sequenze di segni di variabili della stessa lunghezza.

4. Derivabilitá al primo ordine

Dovrebbe essere chiaro cosa si deve intendere per *albero di derivazione di una formula A da assunzioni* $\Gamma \subseteq FBF$: la definizione precisa é per induzione, come nel caso proposizionale.

ESERCIZIO. Dare una definizione dettagliata di albero di derivazione tenendo conto di tutte le regole sui connettivi, sui quantificatori, la RAA e le regole sull' uguaglianza.

Se $\Gamma \subseteq FBF, P \in FBF$, diciamo che P é *derivabile da* Γ, e scriviamo:

$$\Gamma \vdash P$$

se esiste un albero di derivazione di P da assunzioni (non scaricate) che appartengano a Γ. Se Γ é finito $= \{Q_1, \ldots, Q_n\}$, scriveremo

$$Q_1, \ldots, Q_n \vdash P$$

e invece di $\Gamma \cup \{Q\} \vdash P$, scriviamo

$$\Gamma, Q \vdash P.$$

Se $\Gamma = \emptyset$, scriviamo semplicemente $\vdash P$, e P si chiamerá una *legge logica (predicativa).*

Si noti che se $\Gamma \vdash P$, allora esiste un insieme finito $F \subseteq \Gamma$, tale che $F \vdash P$: tale risultato ovvio –un albero di derivazione é per definizione un albero finito – prende il nome altisonante di *teorema di Finitezza.*

La *chiusura deduttiva* di un insieme $\Gamma \subseteq FBF$ e' l' insieme $\{P | \Gamma \vdash P\}$; Γ é *deduttivamente chiuso* se contiene la (quindi e' uguale alla) sua chiusura deduttiva.

NOTA.
Il fatto di usare lo stesso segno $\vdash$ per la derivabilitá proposizionale e per quella al primo ordine non dovrebbe ingenerare alcuna confusione. Se necessario, potremmo indicare la prima con"$\vdash_0$" e la seconda con "$\vdash_1$".

Per illustrare la portata delle condizioni sulle regole $\forall I, \exists E$, si considerino gli esempi seguenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x \doteq 0]1}{\forall x(x \doteq 0)}\forall I(ERRORE!)}{x \doteq 0 \to \forall x(x \doteq 0)} \to I(1)}{\forall x(x \doteq 0 \to \forall x(x \doteq 0))}\forall I}{0 \doteq 0 \to \forall x(x \doteq 0)}\forall E$$

$$(ERRORE!)\dfrac{\exists x_i\, x_i \doteq 0 \qquad \dfrac{[x_i \doteq 0]_1 \qquad \dfrac{\forall x_i(x_i \doteq 0 \to x_i + 0 \doteq 0)}{x_i \doteq 0 \to x_i + 0 \doteq 0}\forall E}{x_i + 0 \doteq 0} \to I}{\dfrac{x_i + 0 \doteq 0}{\forall x_i\,(x_i + 0 \doteq 0)}\forall I}\exists E, (1)$$

$$(ERRORE!)\dfrac{\exists x_i\varphi \qquad \dfrac{[\varphi]_1 \quad [\neg\varphi]_2}{\bot}\neg E}{\dfrac{\dfrac{\bot}{\varphi}RAA, (2)}{\forall x_i\varphi}\forall I}\exists E(1)$$

4.1. Regole derivate.

Le regole sull' uguaglianza sembrano alquanto deboli, ma altre se ne ottengono facilmente come *regole derivate*. A tal proposito, occorrerebbe precisare cosa si intenda per regola derivata in un sistema di deduzione naturale. Questo peró sará del tutto autoesplicativo nei casi che ci interessano: se diciamo che

$$\dfrac{A_1 \quad \ldots A_n}{B}$$

é una regola derivata, vuol dire che $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ mediante una derivazione schematica o uniforme che funziona per tutte le formule che hanno la forma di $A_1, \ldots, A_n, B$.

Per esempio, sosteniamo che:

$$\dfrac{x \doteq y}{y \doteq x} \qquad \dfrac{x \doteq y \qquad y \doteq z}{x \doteq z}$$

sono regole derivate; ed infatti :

$$\dfrac{\dfrac{}{x \doteq x} \quad \dfrac{x \doteq y}{x \doteq x \rightarrow y \doteq x}}{y \doteq x} \rightarrow E$$

(facendo uso della formula atomica $A = z \doteq x$); pertanto (prendendo $A = y \doteq z$)

$$\dfrac{y \doteq z \qquad \dfrac{x \doteq y}{y \doteq z \leftrightarrow x \doteq z}}{x \doteq z} \leftrightarrow E$$

5. Esempi ed esercizi

.

Come esempi di uso della deduzione naturale proponiamo i seguenti:

Proposizione 1. *Per ogni formula α si ha:*

(1) $\vdash \neg\forall x\, \alpha \leftrightarrow \exists x\, \neg\alpha$
(2) $\vdash \neg\exists x\, \alpha \leftrightarrow \forall x\, \neg\alpha$
(3) $\vdash \forall x\, \alpha \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg\alpha$
(4) $\vdash \exists x\, \alpha \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg\alpha$
(5) $\vdash \forall x \forall y\, \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x\, \alpha$
(6) $\vdash \exists x \exists y\, \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x\, \alpha$
(7) *Se* $x \notin FV(\alpha), \vdash \forall x\, \alpha \leftrightarrow \alpha; \vdash \exists x\, \alpha \leftrightarrow \alpha.$

Vediamo alcune derivazioni (lasciando le altre come esercizi). Per la 1, osserviamo intanto che

$$\neg\exists x \neg\alpha \vdash \forall x \alpha$$

di cui ecco una derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\neg\alpha \qquad \dfrac{[\neg\alpha]_1}{\exists x\neg\alpha}\exists I}{\bot}\neg E}{\alpha} RAA, (1)}{\forall x\alpha}\forall I$$

A questo punto, e' quasi immediato che $\neg\forall x\alpha, \neg\exists x\neg a \vdash \bot$, e, mediante RAA concludiamo con: $\neg\forall x\alpha \vdash \exists x\neg\alpha$. Per l'altro verso, con $\exists E$, ed assumendo $\forall x\alpha$ si deriva facilmente $\bot$, e quindi $\neg\forall x\alpha$ per $\neg I$.

Proposizione 2. *Quali che siano le formule α, β e la variabile x, si ha:*

(1)
$$\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta;$$

(2)
$$\vdash \exists x(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta;$$

(3) *Se* $x \notin FV(\beta)$,
$$\vdash \forall x(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \forall x\, \alpha \vee \beta;$$
(4) *Se* $x \notin FV(\beta)$,
$$\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \exists x\, \alpha \wedge \beta;$$
(5) *Se* $x \notin FV(\beta)$,
$$\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\exists x\, \alpha) \to \beta;$$
(6) *Se* $x \notin FV(\beta)$,
$$\vdash \exists x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\forall x\, \alpha) \to \beta;$$
(7) *Se* $x \notin FV(\beta)$,
$$\vdash (\beta \to \forall x\, \alpha) \leftrightarrow \forall x(\beta \to \alpha);$$
(8) *Se* $x \notin FV(\beta)$,
$$\vdash (\beta \to \exists x\, \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \to \alpha).$$

Ne svolgiamo alcuni, lasciando gli altri come esercizi. Due a.d.d. per la 6 (si noti che le restrizioni su $\exists E, \forall I$ sono rispettate) possono essere come segue:

$$\cfrac{\cfrac{[\alpha]_1 \qquad \cfrac{\forall x(\alpha \to \beta)}{\alpha \to \beta}\forall E}{\beta} \to E \qquad [\exists x\alpha]_2}{\cfrac{\beta}{(\exists x\alpha) \to \beta} \to I, (2)} \exists E, (1)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\alpha]_1}{\exists x\alpha}\exists I \qquad (\exists x\alpha) \to \beta}{\beta} \to E}{\alpha \to \beta} \to I, (1)}{\forall x(\alpha \to \beta)} \forall I$$

Due a.d.d per la 8 si possono ottenere come segue. Intanto con passaggi proposizionali, ricordiamo che $A \to B \vdash (\neg A) \vee B$: infatti $\neg((\neg A) \vee B) \vdash A$:

$$\cfrac{\cfrac{\neg((\neg A) \vee B) \qquad \cfrac{[\neg A]_1}{(\neg A) \vee B} \vee I}{\perp} \neg E}{A} RAA, (1)$$

e anche $\neg((\neg A) \vee B) \vdash \neg B$:

$$\cfrac{\cfrac{\neg((\neg A) \vee B) \qquad \cfrac{[B]_2}{(\neg A) \vee B} \vee I}{\perp} \neg E}{\neg B} \neg I, (2)$$

ed infine (esercizio):$A, \neg B \vdash (\neg A) \vee B$. Pertanto $\beta \to \exists x\alpha \vdash (\neg\beta) \vee \exists x\alpha$.

Ora e' facile vedere che $\neg\beta \vdash \exists x(\beta \to a)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\beta]_1 \qquad \neg\beta}{\bot}\,\neg E}{\alpha}\,\bot}{\beta \to \alpha}\,\to I,(1)}{\exists x(\beta \to \alpha)}\,\exists I$$

Inoltre $\exists x\alpha \vdash \exists x(\beta \to a)$:

$$\dfrac{\exists xa \qquad \dfrac{\dfrac{[\alpha]_2}{\beta \to \alpha}\,\to I}{\exists x(\beta \to \alpha)}\,\exists E}{\exists x(\beta \to \alpha)}\,\exists E(2)$$

Quindi, con un 'applicazione di $\vee E$, si ottiene:

$$\neg\beta \vee \exists x\,\alpha \vdash \exists x(\beta \to \alpha),$$

e quindi anche

$$\beta \to \exists x\,\alpha \vdash \exists x(\beta \to \alpha).$$

Per l'altro verso:

$$\dfrac{\exists x(\beta \to \alpha) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\beta]_1 \quad [\beta \to \alpha]_2}{\alpha}\,\to E}{\exists x\alpha}\,\exists I}{\beta \to \exists x\alpha}\,\to I,(1)}{\beta \to \exists x\alpha}\,\exists E,(2)$$

ESERCIZI.[x, y sono variabili distinte.]

(1) $\vdash \exists x(A(x) \to \forall y A(y))$.
(2) $\exists x \forall y A \vdash \forall y \exists x A$.
(3) $\neg\exists x \forall y(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))$.
(4) $\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \neg(A(c) \wedge \neg B(c))$.
(5) $\forall x(A(x) \to B(x)), \exists x \neg B(x) \vdash \exists x \neg A(x)$.
(6) $\exists x \forall y(A(x) \to B(y)), \forall x A(x) \vdash \forall y B(y)$.
(7) $\forall x \exists y(A(x) \to A(y)), \exists x A(x) \vdash \exists y B(y)$.
(8) $\exists y \forall y(A(x) \wedge B(y)) \vdash \forall x A(x) \wedge \exists y B(y)$.
(9) $\forall x \exists y(A(x) \wedge B(y)) \vdash \forall x A(x) \wedge \exists y B(y)$.
(10) $\forall x A(x) \to \forall y B(y) \vdash \exists x \forall y(A(x) \to B(y))$.
(11) $\forall x A(x) \to \forall y B(y) \vdash \forall y \exists x(A(x) \to B(y))$.
(12) $\forall y \exists x(A(x) \to B(y)) \vdash \exists x \forall y(A(x) \to B(y))$.
(13) $\exists x \forall y(A(x) \to B(y)) \vdash \forall y \exists x(A(x) \to B(y))$.