Deduzioni probabilistiche nel Bridge

PCTO "Matematica e comunicazione nel Bridge"

Giuseppe Scollo

Università di Catania, Dipartimento di Matematica e Informatica, Catania, 2022

Indice

Obiettivi formativi

Non sempre la deduzione nel Bridge dà *risposte certe* alle domande che si presentano nel gioco... esempi:

- La licita indica che un opponente ha una distribuzione bilanciata: quale?
- Qual è la divisione dei resti in un colore fra le mani degli opponenti?
- Manca un onore: quante carte dello stesso colore lo accompagnano?

Il **calcolo delle probabilità** dà *risposte incerte*, con un margine di incertezza matematicamente definito. Questa lezione ha un duplice obiettivo:

- **apprendere** le risposte probabilistiche a quesiti frequenti nel Bridge
- **comprendere** la logica di tali risposte

Si deve sempre tener conto dell'informazione da altre fonti: queste possono determinare la *certezza* di eventi che *condiziona* la probabilità della risposta

in particolare, la probabilità di un evento, calcolata a un certo momento del gioco, può venire *modificata* da un evento successivo, che esclude alcuni casi dal novero dei casi possibili

Prerequisiti matematici

Richiami di *concetti* e *definizioni* utili alla *deduzione probabilistica* nel Bridge

- **Teoria degli insiemi:**

  relazione binaria, relazione di equivalenza, insieme quoziente
- **Combinatoria:**

  regola del pastore

  permutazioni semplici, disposizioni semplici

  combinazioni semplici, coefficienti binomiali
- **Probabilità:**

  spazio campionario, eventi, probabilità di un evento

  eventi incompatibili, evento complementare

  probabilità di unione e intersezione di eventi

  probabilità condizionata, eventi indipendenti

Una premessa concettuale, per sgombrare il campo da possibili equivoci:

il *calcolo* di una probabilità non va confuso con la sua *stima* statistica

- il primo risulta da una definizione matematica *esatta*
- la seconda è data da una valutazione *empirica*, che aggiunge all'incertezza inerente al concetto di probabilità un'ulteriore incertezza sul livello di confidenza della stima

La differenza fra i due concetti trova esempi nella fase di licita del Bridge:

- *stima*: una statistica da molti tornei di bridge indica che i contratti che soddisfano il noto *giustificativo*, in termini dei punti onori (PO) in linea, hanno successo nel 70% (circa) dei casi
- *calcolo*: i tre casi di distribuzione bilanciata (4333 o 4432 o 5332), *essendo nota la dichiarazione a NT*, hanno le seguenti probabilità:

  4333: 22,14%,   4432: 45,26%,   5332: 32,60%

  come si giustificano questi numeri?

Le 39 distribuzioni possibili costituiscono una *partizione* dell'insieme delle estrazioni (senza ripetizioni) di 13 carte da un insieme di 52 carte distinte

la cardinalità di tale insieme, lo *spazio campionario* è dunque il numero di *combinazioni semplici* di 13 elementi da un insieme di 52: $\binom{52}{13}$

La probabilità di ciascuna distribuzione, delle 13 carte nei 4 colori, è data dal rapporto fra il numero di combinazioni che essa classifica e la cardinalità dello spazio campionario, in particolare:

$$p(4,3,3,3) = 4\frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}}{\binom{52}{13}} \simeq 10,54\%$$

$$p(4,4,3,2) = 12\frac{\binom{13}{4}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{13}} \simeq 21,55\%$$

$$p(5,3,3,2) = 12\frac{\binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{13}} \simeq 15,52\%$$

tuttavia, *essendo nota la dichiarazione a NT*, lo spazio campionario si riduce al sottospazio delle sole distribuzioni bilanciate

i rapporti fra le tre probabilità restano invariati

perché? v. def. di *probabilità condizionata*

la somma delle tre probabilità, condizionate da questa informazione, dev'essere 1 (100%)

Probabilità delle divisioni dei resti

La divisione dei resti più vantaggiosa non è necessariamente la più *probabile*

esempio: la divisione 3-3 dei 6 resti è la più vantaggiosa,
ma non la più probabile:

KQ10
A932

p(3-3) = 35,53%, p(4-2) = 48,45%, p(5-1) = 14,53%, p(6-0) = 1,49%

Come si calcolano queste probabilità? *Notazione* :

- m-n : divisione dei resti *non ordinata*
- m,n : divisione dei resti *ordinata* (m carte a sinistra, n carte a destra)
- N.B.: p(n-n) = p(n,n), $m \neq n \Rightarrow$ p(m,n) = p(n,m) = p(m-n)/2

Lo *spazio campionario* (casi possibili) è l'insieme delle estrazioni di 13 carte da 26 (ciascuna estrazione di una mano degli opponenti determina quella dell'altra mano)

- per il calcolo del numero di casi di ciascun evento *m,n* , con *m+n=r*, si moltiplica
  il numero di estrazioni di *m* carte da un insieme di *r* carte
  per il numero di estrazioni di 13-*m* carte da un insieme di 26-*r* carte
- il rapporto fra il numero suddetto e quello dei casi possibili dà la probabilità della divisione paritaria *m-m*, mentre il suo doppio dà la probabilità della divisione ineguale *m-n*. Nell'esempio:

$$p(3\text{-}3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{20}{10}}{\binom{26}{13}},\quad p(4\text{-}2) = 2\frac{\binom{6}{2}\binom{20}{11}}{\binom{26}{13}},\quad p(5\text{-}1) = 2\frac{\binom{6}{1}\binom{20}{12}}{\binom{26}{13}},\quad p(6\text{-}0) = 2\frac{\binom{6}{0}\binom{20}{13}}{\binom{26}{13}}$$

Esercizi (1)

E1.1 Probabilità condizionata

La domanda posta a pag. 5 riguarda un'asserzione che vale più in generale: Sia $S/\approx$ la partizione di uno spazio campionario *S* da una relazione di equivalenza $\approx$. Chiaramente, le classi di $\approx$-equivalenza sono eventi mutuamente incompatibili. Sia E l'evento unione di un insieme di tali classi del quale è nota l'impossibilità. Questa informazione riduce lo spazio campionario al complemento di E in *S* e fa crescere proporzionalmente le probabilità degli altri eventi, mantenendone i rapporti. Come si spiega questo in base alla definizione di probabilità condizionata? Qual è il fattore di proporzionalità per il quale crescono dette probabilità?

E1.2 Probabilità di divisioni dei resti

È utile sapere che, se in linea mancano r carte in un colore, la divisione dei resti più probabile è:

- se r=2k: la 1-1 se k=1, altrimenti la (k+1)-(k-1) con probabilità un po' minore del 50%
- se r=2k+1: la (k+1)-k, con probabilità superiore al 50%

Nei seguenti esempi: a) calcolare la probabilità della divisione dei resti nel caso più probabile; b) determinare in tale caso il numero di prese certe nel colore.

A9753	KQ42	AQ54	KQ5	AK7654
1	2	3	4	5
K8642	A853	K2	A432	832

Probabilità di resti con un onore

Quando in un colore si hanno in linea la maggioranza delle carte e la testa del colore, ma manca un onore, occorre decidere se *battere in testa* o tentare l'*impasse* per la sua cattura

In assenza di altri indizi sulla collocazione dell'onore mancante:

- in alcuni casi la probabilità delle divisioni dei resti indica la decisione migliore come negli esercizi E1.2.1, E.1.2.2
- in altri casi ciò non basta, come negli altri casi dell'esercizio E.1.2 serve conoscere le probabilità che l'onore sia secco o secondo o terzo ecc.

Notazione: $p(n|m)$ = probabilità che l'onore mancante sia n-simo se mancano m carte

Fatti: $p(n|2n)=p(n-n)$; $p(n|n)=p(n-0)$; $n+k=m,\ n>k>0 \Rightarrow p(n|m)+p(k|m) = p(n-k)$

N.B.: l'implicazione vale perché gli eventi $n|m$ e $k|m$ sono *incompatibili*

in tal caso il rapporto fra le probabilità $p(n|m)$, $p(k|m)$ vale $p(n|m)/p(k|m)=n/k$

è dunque molto semplice calcolare le probabilità di divisioni dei resti con un onore mancante dalle probabilità delle divisioni dei resti, v. prossimo esercizio

Esercizi (2)

E2.1 Calcolo semplificato delle probabilità di divisioni dei resti con un onore mancante

Spiegare perché valgono i primi due fatti enunciati sopra, e come il terzo giustifichi il seguente metodo di calcolo: $n+k=m,\ n>k>0 \Rightarrow p(n|m) = (n/m)p(n-k),\ p(k|m) = (k/m)p(n-k)$

E2.2 Rapporto fra probabilità di divisioni dei resti simmetriche con un onore mancante

Dimostrare che $n+k=m,\ n>k>0 \Rightarrow p(n|m)/p(k|m)=n/k$

Suggerimenti:

Generalizzare, usando le variabili m,n,k nelle ipotesi dell'antecedente dell'implicazione, il metodo impiegato negli esempi del testo allegato di A. Squellati, pp. 18-19, a una formula per il calcolo di $p(n|m)$, quindi applicarla anche al calcolo di $p(k|m)$, e infine semplificare il rapporto usando l'antecedente dell'implicazione e la nota proprietà di simmetria dei binomiali: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

E2.3 Battere in testa o tentare l'impasse?

AK76
J1098

La cattura della Q è l'obiettivo del Giocante (Sud), che può scegliere fra due tattiche alternative: a) battere in testa, giocando i suoi onori nei primi due giri, oppure b) tentare l'impasse alla Q, sperata in Ovest, e reiterarla se non cade.
Probabilità delle divisioni dei 5 resti: $p(3-2)$ = 67,83%, $p(4-1)$ = 28,26%, $p(5-0)$ = 3,91%. Che probabilità di successo hanno le due tattiche?

Probabilità e informazione (1)

La comunicazione, sia nella licita che con il gioco delle carte, veicola *informazione*, che può modificare le probabilità di determinati eventi

AK64
Q1092

per esempio, nel caso in figura, dalle probabilità della divisione dei 5 resti, v. Esercizio E2.3, possiamo calcolare la probabilità che l'onore mancante sia non più che terzo come somma delle probabilità degli eventi 1|5, 2|5 e 3|5, e poiché l'unione degli eventi 2|5 e 3|5 è l'evento 3-2:

$p(n<4|5) = p(1|5)+p(2|3)+p|3|5) = p(4-1)/5+p(3-2) = 5{,}65\%+67{,}83\% = 73{,}48\%$

Tuttavia, la dinamica del gioco può modificare le probabilità iniziali degli eventi, e.g. può *escludere alcuni eventi*

Come ricalcolare le probabilità degli eventi residui?

- esclusione dell'evento E = certezza dell'evento complementare $\bar{E}$
- le probabilità degli altri eventi vanno *condizionate* all'evento $\bar{E}$, che costituisce il *nuovo spazio campionario*

Questo può determinare cambiamenti di decisioni tattiche? Per esempio, una decisione iniziale del Giocante di battere in testa? Sì! Infatti...

Probabilità e informazione (2)

... nell'esempio in considerazione:

AK64
Q1092

cambiare in corso d'opera una decisione iniziale del Giocante di battere i tre onori?

Supponiamo che il gioco vada così:

- al primo giro Ovest attacca con 8, la presa 8A32 esclude gli eventi 5-0 e 1|5;
- gli eventi residui sono 3-2 e 4|5: la somma delle rispettive probabilità iniziali era p(3-2) + p(4-1)*4/5 = 67,83% + 22,61% = 90,44%
- il ricalcolo delle probabilità degli eventi 3-2 e 4|5 ne mantiene il rapporto portandone la somma al 100%, dunque crescono per un fattore 100/90,44
- al secondo giro Nord gioca piccola verso la Q ed Est scarta... questo esclude l'evento 3-2 e inoltre determina la posizione del J a Ovest; la presa è quindi 4-Q5, ma al giro successivo conviene *cambiare tattica*:
- *impasse* al J col 10 da Sud: se Ovest risponde cartina, cartina da Nord per la presa da Sud, che al giro successivo gioca il 9 verso il K per catturare il J secco.

Probabilità a posteriori

La *probabilità a posteriori* di un evento è valutata *dopo* l'arrivo di *informazione* che la modifica rispetto alla *probabilità a priori*, valutata *prima*

KQ10
A932

Riconsideriamo l'esempio mostrato a pag. 6: è un caso particolare dell'ultimo esempio presentato in Sez. 4.2 del testo di A. Squellati

Per catturare il J, Nord batte i due onori e gli opponenti giocano cartine nel colore, quindi gioca il 10 ed Est risponde allo stesso modo: qual è il rapporto fra le probabilità che il J sia a Ovest o a Est?

questo determina la convenienza probabilistica di giocare l'A subito o alla prossima presa

Correttamente, il testo argomenta che il gioco visto esclude gli eventi 6-0 e 5-1, e dimezza l'evento 4-2 poiché dalla terza cartina da Est si deduce che la divisione dei resti 4-2 è possibile solo se le 4 carte sono a Est. Gli eventi residui 3-3 e 4-2 fissano la posizione del J: a Ovest nella 3-3, a Est nella 4-2. Il calcolo che così ne risulta darebbe la probabilità ***a posteriori***:

p(J a Ovest) = p(3|6) = p(3-3) = 59,46% , p(J a Est) = p(4|6) = p(4-2) = 40,54%

Tuttavia, se si ragiona in base alle probabilità a priori delle divisioni dei resti con un onore mancante, usando il metodo semplificato di calcolo esposto nell'Esercizio E2.1, e si effettua il ricalcolo delle probabilità a posteriori p(3|6) e p(4|6), si ottiene un risultato diverso, v. Esercizio 3.1:

p(J a Ovest) = p(3|6) = 52,38% , p(J a Est) = p(4|6) = 47,62%

Come mai? Sorge il sospetto che in uno dei due metodi di calcolo non si sia tenuto conto di ***tutta*** l'informazione che è possibile dedurre dalla dinamica del gioco osservata

Posti liberi

Fissiamo inanzitutto un principio:

la probabilità misura l'*incertezza*: il prodotto p(1-p) è massimo per p=0,5 (massima incertezza), si azzera per p=0 o p=1 (certezza)

Per sciogliere l'enigma, facciamo ricorso alla cosiddetta *teoria dei posti liberi*

questo metodo è illustrato in Sez. 4.2 del testo di A. Squellati usando informazioni dalla licita, tuttavia mostriamo che si può applicare anche al caso in questione

Per valutare il rapporto fra le probabilità che l'onore mancante si trovi a Est o a Ovest, dopo il gioco della terza cartina da Est, consideriamo che:

- Est ha già mostrato 3 carte, gli restano 10 posti liberi per l'onore mancante
- Ovest ne ha mostrato 2, gli restano 11 posti liberi
- dunque p(J a Ovest)/p(J a Est) = 11/10

e in effetti 11/10 = 52,38/47,62, come dal secondo metodo nella pagina precedente

Attenzione: la valutazione del rapporto dipende anche da quante prese sono state già effettuate e da quante altre carte dello stesso colore si suppone che si trovino nelle mani degli opponenti! Per esempio, se il caso in questione si presentasse alla fine:

dopo 11 prese fatte, terza cartina da Est: p(J a Ovest)/p(J a Est) = 2/1

Una ulteriore analisi di questo caso è proposta nel prossimo Esercizio 3.2

E3.1 Probabilità a posteriori

- Verificare che il ricalcolo delle probabilità a posteriori $p(3|6)$ e $p(4|6)$ nel caso discusso a pag. 12, usando il metodo semplificato esposto nell'Esercizio E2.1, dà i risultati lì indicati.
- Di quale informazione deducibile dalla dinamica del gioco osservata non tiene conto il primo metodo riportato a pag. 12?

E3.2 Probabilità di successo di una tattica

Nell'esempio discusso a pag. 12, la decisione di battere l'A dopo la terza cartina giocata da Est è una conferma della tattica iniziale di battere in testa i tre onori per catturare l'onore mancante.

- Qual è la probabilità a priori di successo di questa tattica, eseguita all'inizio del gioco?
- Qual è la sua probabilità di successo se viene eseguita alla fine, dopo 9 prese nelle quali non è stata giocata alcuna carta del colore?
- In confronto a quest'ultima, la probabilità di successo della tattica dopo il gioco della terza cartina da Est, valutata al 66,67% dato il suo rapporto 2/1 rispetto alla probabilità di fallimento, è aumentata o diminuita?

Come si calcola il numero (39) delle distribuzioni possibili? Occorre elencarle tutte?
uffa!

No, lo si può calcolare *per ricorrenza*
anche questo è noioso, ma è facile da automatizzare!

Un paio di *definizioni*:

- P_n : numero di *partizioni* di n (somme uguali a n di addendi interi positivi)
- $P_{n,k}$: numero di partizioni di n in *al più k addendi interi positivi*

inoltre si definisce $P_{0,0} = 1$ per dare una base alla ricorrenza, che segue

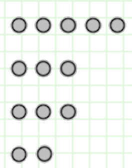
Proprietà:

$P_{n,1} = 1$

$n < k \Rightarrow P_{n,k} = P_{n,n}$

$n \geq k > 1 \Rightarrow P_{n,k} = P_{n,k-1} + P_{n-k,k}$

Diagramma di Ferrers (5,3,3,2)



Per il numero delle distribuzioni si calcola $P_{13,4}$ (usando per brevità $P_{n,2} = 1+\lfloor n/2 \rfloor$)

$P_{13,4} = P_{13,3} + P_{9,4} = P_{13,2} + P_{10,3} + P_{9,3} + P_{5,4} = 7 + P_{10,2} + P_{7,3} + P_{9,2} + P_{6,3} + P_{5,3} + P_{1,4} =$
ecc. $= 7+6+4+3+1+5+4+2+1+3+2+1 = 39$

Se vuoi contar le pecore, conta le zampe e dividi per 4

Combinatoria: *arte del contare senza contare*

Senso matematico della regola: richiede alcuni concetti di teoria degli insiemi

- ***Relazione binaria su un insieme*** S: sottoinsieme del prodotto cartesiano $S \times S$
  per $a,b \in S$, si scrive anche aRb se $(a,b) \in R \subseteq S \times S$
- ***Relazione di equivalenza su*** S: relazione binaria $\approx$ su S che per ogni $x, y, z \in S$ soddisfa:
  riflessività: $x \approx x$
  simmetria: $x \approx y \rightarrow y \approx x$
  transitività: $x \approx y, y \approx z \rightarrow x \approx z$
- ***Classe di equivalenza*** $[a]_{\approx}$ di $a \in S$: $\{x \in S \mid x \approx a\}$
- ***Insieme quoziente*** $S/\approx$ di S per una relazione di equivalenza $\approx$ su S: insieme delle classi di equivalenza indotte da $\approx$ su S
  $S/\approx$ è una *partizione* di S in classi non vuote e disgiunte che lo ricoprono

Senso matematico della regola del pastore: se S è un insieme finito e $\approx$ su S induce classi di equivalenza che hanno tutte la stessa cardinalità k, allora $|S/\approx| = |S|/k$

Le *combinazioni* di k elementi estratti da un insieme di n elementi, con k < n, sono *semplici* se senza ripetizioni, cioè i k elementi sono tutti distinti (come nelle estrazioni del Lotto)

da qui la combinatoria ha preso il suo nome

non ha importanza l'ordine in cui i k elementi sono stati estratti

quante sono? È il numero C(n,k) dei sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di cardinalità n ...
per calcolarlo richiamiamo due concetti, dove la qualifica "semplici" ha sempre lo stesso significato: elementi tutti distinti

- *permutazioni semplici* di n elementi: sono le n! sequenze di n elementi
- *disposizioni semplici* di k elementi da un insieme di n elementi: sono le D(n,k) sequenze di k elementi da un insieme di n, $D(n,k) = (n)_k = n(n-1)\ldots(n-(k-1)) = n!/(n-k)!$

Per calcolare il numero di combinazioni semplici, definiamo una relazione di equivalenza sulle sequenze per ignorare l'ordine in cui vi compaiono gli elementi:

due sequenze sono equivalenti se hanno gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine

applichiamo quindi la regola del pastore e introduciamo la notazione dei *coefficienti binomiali*:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = D(n,k)/k! = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k! = n!/k!(n-k)! = \binom{n}{n-k}$$

Perché si chiamano coefficienti binomiali?

Sono i coefficienti dei monomi $a^k b^{n-k}$ nell'espansione polinomiale di $(a+b)^n$

Proposizioni, eventi, probabilità

Diamo per acquisite le definizioni di *spazio campionario* U e di *evento* $E \subseteq U$

- un evento è solitamente espresso da una *proposizione*, che elementi di U possono verificare o meno
- la proposizione esprime la *proprietà caratteristica* dell'evento

La *probabilità* di un evento si misura con il rapporto $p(E) = |E|/|U|$

in uno spazio campionario *finito*, la probabilità p(E) di un evento E è sempre un numero *razionale* nell'intervallo [0,1], spesso espresso come percentuale

La probabilità, detta anche *speranza matematica*, misura il grado di (in)certezza sul verificarsi dell'evento, in un processo che progressivamente riduce l'insieme dei casi possibili, modificando le probabilità degli eventi

la proposizione caratteristica di un evento E è così una *congettura* sul fatto che il processo renda prima o poi certo (un sottoinsieme di) E

Ai connettivi proposizionali che possono formare congetture corrispondono le operazioni insiemistiche sugli eventi; in particolare, alla *negazione* della proprietà di E, che *esclude* il verificarsi di E, corrisponde l'*evento complementare* $\overline{E} = U \setminus E$, con $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$

il prodotto $p(E) \cdot (1-p(E))$ misura il grado di incertezza sull'esito fra le due alternative: nullo agli estremi ($p(E) \in \{0,1\}$), massimo al centro ($p(E) = 0,5$)

Relazioni fra eventi

$\wp(U)$ è lo *spazio degli eventi* nello spazio campionario U:
l'insieme delle parti (o *powerset*) di U

Alcune relazioni binarie su $\wp(U)$ sono particolarmente significative:

- *implicazione*: E1 *implica* E2 se il verificarsi di E1 rende certo E2
  - ciò accade se e solo se $E1 \subseteq E2$
  - se $E1 \subset E2$, allora $p(E1) < p(E2)$
- *incompatibilità*: E1 ed E2 sono *incompatibili* se il verificarsi di uno dei due esclude l'altro, ovvero implica il complementare dell'altro
  - ciò accade se e solo se $E1 \cap E2 = \emptyset$
  - la relazione di incompatibilità è simmetrica
  - in particolare, eventi complementari sono incompatibili
- *indipendenza*: E1 ed E2 sono *indipendenti* se il verificarsi di uno dei due non modifica la probabilità dell'altro
  - alla caratterizzazione insiemistica di questa relazione serve il concetto di *probabilità condizionata*, v. appresso

Quanto può influire sulla probabilità di un evento E1 l'informazione dell'essersi verificato un altro evento E2?

- E2 è diventato un *evento certo*, con probabilità 1, dunque:
- E2 è il *nuovo spazio campionario*
- gli elementi di E1 che non appartengono a E2 sono da escludere
  - la proposizione che caratterizza E1 non cambia,
  - l'insieme che la verifica diviene $E1 \cap E2$

La *probabilità condizionata* $p(E1|E2)$ di E1 rispetto a E2, con $p(E2)>0$, è definita da

$$p(E1|E2) = p(E1 \cap E2)/p(E2)$$

Definizione: E1 è *indipendente* da E2 se $p(E1|E2) = p(E1)$

Fatto: su eventi di probabilità non nulla, la relazione di indipendenza è *simmetrica*, ovvero $p(E1|E2) = p(E1) \Leftrightarrow p(E2|E1) = p(E2)$

- discende dalla definizione di probabilità condizionata, per la commutatività di $\cap$

Fatto: se E1 ed E2 sono eventi indipendenti, allora $p(E1 \cap E2) = p(E1) \cdot p(E2)$

- conseguenza immediata delle due precedenti definizioni

Fonti di esempi ed esercizi proposti in questa lezione:

- FIGB Commissione Insegnamento - Eserciziario per il Corso Fiori (Luglio 2017)
- V. De Petris, *La Combinatoria. Primi elementi per la scuola media* (2002)

Approfondimenti di combinatoria e calcolo delle probabilità nel Bridge:

A. Squellati, *Un po' di Matematica per il giocatore di Bridge* (2018)

Per osservazioni, domande, proposte di soluzioni di esercizi ecc.: scrivere a

scollo@dmi.unict.it

Buon divertimento!